

**FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
PARA PROBLEMAS DE VIGAS**

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío-Bío, como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada.

Juan Paulo Ortega Ponce

Director: David Mora Herrera

Concepción, Agosto 2018.

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE VIGAS

por

Juan Paulo Ortega Ponce

Disertación presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío, como requisito parcial para la obtención del Grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada.

Aprobada por:

Dr. David Mora Herrera

Profesor Guía

Departamento de Matemática-Univ. del Bío-Bío, Chile

Profesor Informante

———, Chile

Profesor Informante

———, Chile

Universidad del Bío Bío

**Facultad de Ciencias Departamento de Estadística y Departamento de
Matemática Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática
Aplicada, o Mención Estadística**

RESUMEN

El siguiente trabajo tiene como objetivo estudiar un método de elementos finitos para aproximar, la deformación de una viga modelada por las ecuaciones de Timoshenko. En particular, consideraremos una viga empotrada con discontinuidades en sus propiedades físicas. Dichas estructuras están sometidas a fuerzas externas. Por lo tanto es muy importante predecir deformaciones y tensiones para mejorar su diseño y resistencia. Para el análisis del problema, eliminamos la variable rotación mediante un cambio de variable adecuado, de modo que, el problema que estudiaremos se escribe en términos del desplazamiento y el esfuerzo de corte. Analizaremos existencia y unicidad de solución a nivel continuo y además, regularidad adicional de dicha solución.

El esquema numérico está basado en un método de elementos finitos, de modo que el desplazamiento es aproximado con funciones cúbicas a trozos, y el esfuerzo de corte con funciones lineales a trozos. Demostraremos existencia y unicidad de solución para el problema discreto, resultados de convergencia y estimaciones del error.

Por último, presentamos resultados numéricos que confirman los análisis teóricos y que muestran la independencia del método propuesto con respecto al espesor de la viga.

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	10
1.1. Preliminares	10
2. Teoría de vigas	14
2.1. Teoría de vigas de Euler-Bernoulli (TVE).	14
2.2. Teoría de vigas de Timoshenko (TVT).	18
3. Método de elementos finitos libres de bloqueo para problemas de vigas	22
3.1. Formulación variacional	22
3.2. Esquema Discreto	37
3.3. Resultados Numéricos	44
Conclusiones	65
Bibliografía	66

INTRODUCCIÓN

Estructuras delgadas con discontinuidades en su geometría o en sus propiedades físicas son usadas en diversas aplicaciones de ingeniería. Dichas estructuras están sometidas a fuerzas externas. Por lo tanto es muy importante predecir deformaciones y tensiones para mejorar su diseño y resistencia.

En particular, en este trabajo estudiaremos vigas, modeladas por las ecuaciones de Timoshenko. Las vigas son objetos elásticos que se usan en toda la ingeniería estructural, como en la construcción de edificios, automóviles, pilares de puentes, aviones, etc. Estas vigas, al ser sometidas a alguna fuerza externa, sufren deformaciones que afectan su estructura. Es por esto que es de vital importancia estudiar cómo afectan estas fuerzas externas para predecir los desplazamientos y determinar la resistencia que deben tener estas estructuras.

En esta memoria se realizó un revisión detallada de dos artículos, los cuales fueron el punto de partida y la motivación de esta tesis. En primer lugar, Douglas N. Arnold en 1981 (ver [3]), estudió un modelo de vigas descrito por las ecuaciones de Timoshenko (ver [14, 15]), donde la deformación de la viga empotrada se describe en términos del desplazamiento transversal w y la rotación β . Además, se presenta un esquema mixto que considera el esfuerzo de corte V , mostrando que este método mixto también evita el efecto de bloqueo numérico.

La formulación variacional presentada es: Hallar $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ tal que:

$$\begin{aligned} & \int_I E(x) \beta'(x) \xi'(x) dx + \frac{1}{t^2} \int_I \kappa(x) (\beta(x) - w'(x)) (\xi(x) - v'(x)) dx \\ & = \int_I f(x) v(x) dx + \int_I g(x) \eta(x) dx \quad \forall (\eta, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \end{aligned} \quad (1)$$

donde las comas “ ’ ” representan derivadas espaciales de primer y segundo orden según corresponda, $I := (0, L)$, donde L representa el largo de la viga y E y κ son constantes positivas. Por conveniencia y sin pérdida de generalidad se asume que $E = \kappa = 1$. La formulación variacional anterior tiene como problema fuerte asociado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} -\beta''(x) + t^{-2}(\beta(x) - w'(x)) = f(x) & \text{en } I, \\ t^{-2}(\beta(x) - w'(x))' = g(x) & \text{en } I, \\ w(0) = \beta(0) = w(L) = \beta(L) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

En [3] se prueba que el problema (1) equivalente al sistema (2), tiene solución única y que depende continuamente de los datos f y g . Sea $H^{-1}(I)$ el espacio dual de $H_0^1(I)$. Dados $f, g \in H^{-1}(I)$, $0 < t \leq 1$, se tiene que existe un único par de funciones $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ tales que

$$\begin{aligned} \int_I \beta'(x) \xi'(x) dx + \frac{1}{t^2} \int_I (\beta(x) - w'(x)) (\xi(x) - v'(x)) dx &= \int_I f(x) v(x) dx \\ &+ \int_I g(x) \eta(x) dx, \end{aligned} \quad (3)$$

para todo $(\eta, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$. Además, para $p = 0, 1, \dots$, existe una constante C , que depende solo de p , tal que

$$\|\beta\|_{p+1, I} + \|w\|_{p+1, I} + t^{-2} \|\beta - w'\|_{p, I} \leq C (\|f\|_{p-1, I} + \|g\|_{p-1, I}).$$

Además en [3] se introduce como incógnita adicional el esfuerzo de corte escalado el que definimos como $V := t^{-2} \kappa(x) (\beta(x) - w'(x))$. De esta manera el problema (1) es equivalente a la siguiente formulación variacional mixta: Hallar $(\beta, w, V) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \times L^2(I)$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_I \beta' \xi' + \int_I V (\xi - v) &= \int_I g v \quad \forall (\xi, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I), \\ \int_I (\beta - w') \eta - t^2 \int_I V \eta &= 0 \quad \forall \eta \in L^2(I). \end{aligned} \quad (4)$$

También en este trabajo se muestra que la formulación mixta (4), posee solución única que depende continuamente de los datos.

Por otro lado, en [10] se analizó una aproximación de una formulación basada en el momento flector de una viga no homogénea modelada por las ecuaciones de Timoshenko, considerando una formulación mixta que introduce como incógnitas adicionales al momento flector, definido por $M(x) := E(x) \beta'(x)$ y el esfuerzo de corte escalado $V := t^{-2} \kappa(x) (\beta(x) -$

$w'(x)$), de modo que el problema (1) se reescribe como sigue:

$$\begin{cases} M(x) = E(x)\beta'(x) & \text{en } I, \\ -M'(x) + V(x) = g(x) & \text{en } I, \\ V'(x) = f(x) & \text{en } I, \\ V(x) = t^{-2}\kappa(\beta(x) - w'(x)) & \text{en } I, \\ w(0) = \beta(0) = w(L) = \beta(L) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

En dicho trabajo se considera que existen $\underline{E}, \overline{E}, \underline{\kappa}, \overline{\kappa} \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\overline{E} \geq E(x) \geq \underline{E} > 0 \quad \forall x \in I,$$

$$\overline{\kappa} \geq \kappa(x) \geq \underline{\kappa} > 0 \quad \forall x \in I.$$

Luego, testeando el sistema (5) con funciones test adecuadas e integrando por partes, obtenemos la siguiente formulación variacional, donde por simplicidad, omitiremos la dependencia de la variable x :

Hallar $((M, V), (\beta, w)) \in H^1(I) \times H^1(I) \times L^2(I) \times L^2(I)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_I \frac{M\tau}{E} + t^2 \int_I \frac{V\xi}{\kappa} + \int_I \beta(\tau' - \xi) - \int_I w\xi' &= 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in H^1(I) \times H^1(I), \\ \int_I \eta(M' - V) - \int_I vV' &= - \int_I g\eta - \int_I fv \quad \forall (\eta, v) \in L^2(I) \times L^2(I). \end{aligned} \quad (6)$$

Se mostró en [10] que el problema (6) satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi, y por lo tanto (6) admite una única solución que depende continuamente de los datos del problema. Además, se presenta el siguiente resultado de regularidad adicional para la solución de (5).

Proposición 0.1 *Suponga que $f, g \in H^l(I)$, $l = 0, 1$. Sea $((M, V), (\beta, w)) \in H^1(I) \times H^1(I) \times L^2(I) \times L^2(I)$ la solución del problema (6). Entonces, existe una constante $C > 0$, independiente de t, g y f , tal que*

$$\|w\|_{1,I} + \|\beta\|_{1,I} + \|V\|_{l+1,I} + \|M\|_{l+1,I} \leq C(\|g\|_{l,I} + \|f\|_{l,I}).$$

Para resolver el esquema mixto discreto del problema (6) se consideró aproximar el esfuerzo de corte y el momento flector, con funciones lineales a trozos y continuas y aproximar el desplazamiento transversal y la rotación por funciones constantes a trozos. Finalmente en

este artículo se establecen las versiones discretas de las hipótesis de la teoría de Babuška-Brezzi, para así concluir la existencia y unicidad de solución y estabilidad del problema.

El objetivo de este proyecto es estudiar una formulación continua y discreta para el modelo de vigas de Timoshenko en términos del desplazamiento transversal y la deformación de corte transversal. Con referencia a lo antes mencionado, el modelo descrito por la ecuación (1) es reformulado introduciendo la deformación de corte transversal $\gamma := \beta - w'$, como se propuso en [4], para el estudio de placas modeladas por las ecuaciones de Reissner–Mindlin. De este modo, el problema (1) se puede escribir de forma equivalente como:

Hallar $(\gamma, w) \in H$ tal que

$$\int_I E(\gamma + w')'(\eta + v')' + t^{-2} \int_I \kappa \gamma \eta = \int_I f v + \int_I g(\eta + v') \quad \forall (\eta, v) \in H, \quad (7)$$

donde $H := \{(\eta, v) \in H^1(I) \times H^2(I) : v(0) = v(L) = 0 \text{ y } (\eta + v')(0) = (\eta + v')(L) = 0\}$.

A diferencia de los trabajos [3, 10], en nuestra formulación la variable w que representa el desplazamiento transversal, será aproximada en el espacio de las funciones cúbicas con derivada continua, de tal forma que sea subespacio de $H^2(I)$. Además, se pide que $\kappa(x)$ sea una función continua sobre todo I y que su derivada sea continua por subintervalos, donde estos subintervalos son determinados por los puntos de discontinuidades de $\kappa(x)$. Mostraremos que la formulación variacional (7) satisface la hipótesis del Lema de Lax–Milgram a nivel continuo y nivel discreto, concluyendo así que existe una única solución que depende continuamente de los datos f y g . Además, presentaremos resultados de regularidad adicional que nos ayudarán a establecer el orden de convergencia de nuestro método propuesto.

A continuación se describe el contenido de los capítulos de esta memoria.

En el primer capítulo se presentan algunos conceptos clásicos de la teoría de formulaciones variacionales, que serán de gran útiles para demostrar existencia y unicidad de solución de nuestro problema.

En el Capítulo 2 comentamos los modelos más estudiados en la teoría de vigas, haciendo énfasis en las diferencias entre dichos modelos y las respectivas ecuaciones diferenciales que los modelan. Además, se explican las condiciones de contorno que dichas ecuaciones diferenciales tendrán asociadas.

En el Capítulo 3 se presentan resultados de existencia, unicidad y regularidad de la solución del problema (7), usando la teoría clásica de formulaciones variacionales. Incluimos también resultados numéricos que muestran el buen comportamiento del método propuesto.

Por último, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones de este trabajo y sus posibles extensiones.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene resultados básicos y esenciales que permiten el desarrollo y la comprensión del presente estudio, cuya finalidad es fundamentar de manera teórica los resultados obtenidos. Los temas considerados se enmarcan dentro de la teoría de problemas variacionales.

1.1. Preliminares

Dado un abierto Ω de \mathbb{R} , $C^\infty(\Omega)$ denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre Ω . Para cada $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ definimos su soporte por

$$\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Además, introducimos el espacio de funciones

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto y } \text{sop}(\varphi) \subseteq \Omega\}.$$

Definimos el espacio

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u|^2 dx < +\infty \right\},$$

el cual es un espacio de Hilbert provisto del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{0,\Omega} := \int_{\Omega} uv \, dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

La norma $\|\cdot\|_{0,\Omega} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, está dada por

$$\|u\|_{0,\Omega} := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Ahora introduciremos el concepto de derivada distribucional para poder seguir definiendo los espacios que necesitamos en esta tesis.

Definición 1.1 Dada $v \in L^2(\Omega)$, se dice que $v' \in L^2(\Omega)$, en el sentido distribucional, si existe $z \in L^2(\Omega)$ tal que

$$- \int_{\Omega} v \varphi' dx = \int_{\Omega} z \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

y en tal caso se escribe $v' := z$.

Usando la definición anterior, se introduce el espacio de Sobolev

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : v' \in L^2(\Omega)\},$$

provisto del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} := \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} u'v' \, dx, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

y la norma inducida $\|\cdot\|_{1,\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, que está dada por

$$\|u\|_{1,\Omega} := \left\{ \|u\|_{0,\Omega}^2 + \|u'\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Se denota por $H_0^1(\Omega)$ a la adherencia de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, el cual es un subespacio de $H^1(\Omega)$. Este espacio se caracteriza por funciones que se anulan en la frontera de Ω , es decir,

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

De manera similar se define el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ como sigue:

$$H^2(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v'' \in L^2(\Omega)\},$$

el cual es un espacio de Hilbert provisto del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{2,\Omega} := \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} u'v' \, dx + \int_{\Omega} u''v'' \, dx \quad \forall u, v \in H^2(\Omega),$$

y la norma inducida $\|\cdot\|_{2,\Omega} : H^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{2,\Omega} := \{\|u\|_{0,\Omega} + \|u'\|_{0,\Omega} + \|u''\|_{0,\Omega}\}^{1/2} \quad \forall u \in H^2(\Omega).$$

A continuación mostraremos algunos resultados que nos permitirán concluir la solubilidad de problemas variacionales del tipo:

Hallar $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H, \tag{1.1}$$

donde H es un espacio de Hilbert, $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal.

Hallar $u_h \in H_h$ tal que

$$B(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in H_h, \tag{1.2}$$

donde H_h es un subespacio de dimensión finita de H , $B : H_h \times H_h \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F : H_h \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal.

Ahora presentaremos las condiciones para asegurar existencia, unicidad y estabilidad de solución de los problemas (1.1) y (1.2).

Definición 1.2 Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ y $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle_Q)$ espacios de Hilbert reales. Se dice que una forma bilineal $B : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|B(x, y)| \leq M\|x\|_H\|y\|_Q \quad \forall (x, y) \in H \times Q.$$

Definición 1.3 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert y $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que B es fuertemente coerciva (o H -elíptica) si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$B(x, x) \geq \alpha \|x\|_H^2 \quad \forall x \in H.$$

Teorema 1.1 (Lema de Lax-Milgram). Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert real y sea $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, acotada y H -elíptica con constantes M y α , respectivamente. Entonces, para cada $F \in H'$ (H' es el espacio dual de H) existe un único $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H$$

y

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|$$

Demostración. Ver Teorema 1.1 en [9]. □

Finalmente, pero no menos importante, enunciaremos un lema que nos permitirá obtener estimaciones del error, las cuales nos ayudarán a derivar propiedades de convergencia de nuestro método de elementos finitos que presentaremos en esta tesis.

Lema 1.1 (Lema de Céa) Suponga que B es una forma bilineal acotada (con constante M) y H -elíptica (con constante α). Sean $u \in H$ y $u_h \in H_h$ las soluciones de los problemas (1.1) y (1.2), respectivamente. Entonces

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Demostración. Ver Lema 4.3 en [9]. □

Capítulo 2

Teoría de vigas

Una viga es un elemento estructural elástico tridimensional donde una de sus dimensiones siempre es mayor que las otras dos. La propiedad de elasticidad de la viga hace que cuando se le aplica una carga, produce el fenómeno llamado flexión. Conocer las tensiones y esfuerzos producidos por dicha flexión es de gran importancia en ingeniería estructural, para calcular las cargas que puede soportar una viga que posee determinados parámetros físicos y geométricos, sin colapsar.

En este capítulo, presentaremos dos modelos clásicos de vigas. Estos modelos son el de Euler-Bernoulli (TVE) y Timoshenko (TVT). Para describir los modelos de vigas, introducimos el sistema de coordenadas (x, y, z) , donde x es la coordenada asociada al largo de la viga, y es la coordenada asociada al ancho y z la coordenada asociada al espesor de la viga. Desde ahora en adelante, la tripleta (u, v, w) representará las componentes de desplazamiento sobre las coordenadas (x, y, z) y w_0 corresponderá a la flexión transversal de un punto en el semiplano. Para nuestro estudio, asumiremos que el desplazamiento w es cero. En lo que sigue, analizaremos los modelos de vigas mencionados anteriormente.

2.1. Teoría de vigas de Euler-Bernoulli (TVE).

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli es el modelo de viga más simple. En este modelo las fibras normales al plano medio antes de la deformación permanecen normales al plano

medio después de la deformación. Este supuesto nos indica que no estamos considerando deformaciones transversales normales ni de corte.

Las ecuaciones básicas de la teoría de Euler-Bernoulli son las siguientes:

$$\begin{aligned} u^E(x, z) &= -z \frac{dw_0^E}{dx}, \\ w^E(x, z) &= w_0^E(x), \end{aligned}$$

donde el superíndice E denota que las cantidades son referentes a la TVE.

Para obtener las ecuaciones de movimiento para las vigas Euler-Bernoulli, consideremos primero la energía de deformación virtual δU , la cual está dada por:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx \quad (2.1)$$

donde δ es el símbolo de variación, A es el área de la sección transversal de una viga uniforme, L el largo, σ_{xx} la tensión axial y ε_{xx} la deformación normal. Notamos que la energía de deformación asociada a la deformación de corte es nula en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

Usando la relación lineal de deformación-desplazamiento,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^E}{\partial x} = -z \frac{d^2 w_0^E}{dx^2},$$

en la ecuación (2.1) obtenemos

$$\delta U = - \int_0^L M_{xx}^E \frac{d^2 \delta w_0^E}{dx^2} dx$$

donde M_{xx}^E es el momento flector definido como

$$M_{xx}^E = \int_A z \sigma_{xx} dA.$$

Asumiendo que la carga transversal $q(x)$ actúa sobre el eje centroidal de la viga y que no se aplican más cargas, la energía potencial virtual de la carga q está dada por

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0^E dx.$$

El principio de desplazamientos virtuales establece que, si un cuerpo está en equilibrio, entonces el trabajo virtual total realizado satisface $\delta W = \delta U + \delta V = 0$. Por lo tanto, tenemos

$$\delta W = - \int_0^L \left(M_{xx}^E \frac{d^2 \delta w_0^E}{dx^2} + q \delta w_0^E \right) dx = 0. \quad (2.2)$$

Integrando por partes dos veces el primer término en la ecuación (2.2) se obtiene

$$\int_0^L \left(-\frac{d^2 M_{xx}^E}{dx^2} - q \right) \delta w_0^E dx + \left[M_{xx}^E \frac{d \delta w_0^E}{dx} - \frac{d M_{xx}^E}{dx} \delta w_0^E \right]_0^L = 0. \quad (2.3)$$

Dado que δw_0^E es arbitrario en $(0 < x < L)$, obtenemos la ecuación de equilibrio

$$-\frac{d^2 M_{xx}^E}{dx^2} = q \quad \text{para } 0 < x < L. \quad (2.4)$$

Es útil introducir la fuerza de corte Q_x^E y reescribir la ecuación de equilibrio (2.4) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -\frac{dM_{xx}^E}{dx} + Q_x^E = 0, \\ \frac{dQ_x^E}{dx} = q. \end{cases} \quad (2.5)$$

La forma de las condiciones de contorno de la TVE está dada por el término de frontera en la ecuación (2.3). Es claro que el desplazamiento w_0^E es conocido o bien la fuerza de corte Q_x^E es especificada en un punto sobre la frontera. Además, la inclinación $\frac{dw_0^E}{dx}$ es especificada o bien el momento flector M_{xx}^E es conocido en un punto de frontera. Así, tenemos que especificar

$$\left\{ \begin{array}{c} w_0^E \\ \frac{dw_0^E}{dx} \end{array} \right\} \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{c} Q_x^E = \frac{dM_{xx}^E}{dx} \\ M_{xx}^E \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Especificar w_0 o $\frac{dw_0^E}{dx}$ se conoce como una condición de contorno esencial, cinemática o geométrica mientras que especificar Q_x^E o M_{xx}^E se conocen como una condición de contorno natural, estática o de fuerza.

Usando la ley de Hooke, podemos escribir la tensión axial como

$$\sigma_{xx} = E_x \varepsilon_{xx} = -E_x z \frac{d^2 w_0^E}{dx^2}$$

donde E_x es el módulo de Young. Así, obtenemos lo siguiente para el momento flector

$$M_{xx}^E = \int_A z \sigma_{xx} dA = -D_{xx} \frac{d^2 w_0^E}{dx^2}, \quad (2.7)$$

donde $D_{xx} = E_x I_{yy}$ es la rigidez de flexión de la viga e I_{yy} es el segundo momento de área con respecto al eje y , el cual se define como $I_{yy} = \int_A z^2 dA$. El reemplazo de la ecuación (2.7) en las ecuaciones (2.5) y (2.6) nos permite obtener la ecuación que gobierna la TVE, la cual está dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D_{xx} \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} \right) = q \quad \text{para } 0 < x < L. \quad (2.8)$$

A continuación, se especificarán las condiciones de contorno asociadas a una viga de Euler-Bernoulli, que dependerán del estado en que encontremos la viga, ya sea, con sus extremos empotrados, apoyados o libres.

- **Viga simplemente apoyada** : En este caso, el desplazamiento transversal w_0^E es conocido y su valor es cero. La fuerza de corte Q_x^E es desconocida, pero el momento flector M_{xx}^E conocido, mientras que la derivada $\frac{dw_0^E}{dx}$ es desconocida.
- **Viga empotrada** : En este caso, el desplazamiento transversal w_0^E y la derivada $\frac{dw_0^E}{dx}$ se especifican y su valor es cero. La fuerza de corte Q_x^E y el momento flector M_{xx}^E son desconocidos.
- **Viga libre** : El desplazamiento transversal y la derivada $\frac{dw_0^E}{dx}$ son desconocidos. Mientras que momento flector y la fuerza de corte se especifican.

2.2. Teoría de vigas de Timoshenko (TVT).

La teoría de vigas propuesta por Timoshenko, se basa en el campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} u^T(x, z) &= -z\phi^T(x), \\ w^T(x, z) &= w_0^T(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde u y w representan las mismas cantidades que en la teoría de Euler-Bernoulli, ϕ corresponde al ángulo de rotación de la sección transversal (ver Figura 2.1) y el superíndice T denota que las cantidades se refieren a la TVT. En la teoría de vigas de Timoshenko el supuesto de normalidad de la TVE es relajado, es decir, que las fibras de la viga no permanecen necesariamente perpendiculares al eje de la viga después de la flexión. Además en la TVT se consideran las deformaciones por corte, y por lo tanto se pueden considerar vigas cortas (a diferencia de Euler- Bernoulli).

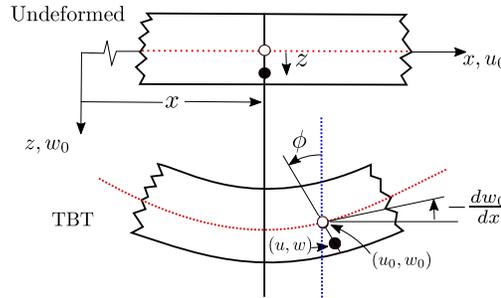


Figura 2.1: Deformación típica de la viga de Timoshenko-

De las ecuaciones de desplazamientos (2.9), podemos desprender mediante derivación, las relaciones de deformación-desplazamiento como sigue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u^T}{\partial x} = z \frac{d\phi^T}{dx}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u^T}{\partial z} + \frac{\partial w^T}{\partial x} = \phi^T + \frac{dw_0^T}{dx}, \end{aligned}$$

donde ε_{xx} es la deformación normal y ϕ_{xz} es el esfuerzo axial. Notamos que la deformación transversal de corte es no nula. Por lo tanto, la energía potencial virtual δU incluye la energía

virtual asociada a la deformación de corte, es decir,

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \\
&= \int_0^L \int_A \left[\sigma_{xx} z \frac{d\delta \phi^T}{dx} + \sigma_{xz} \left(\delta \phi^T + \frac{d\delta w_0^T}{dx} \right) \right] dA dx \\
&= \int_0^L \left[M_{xx}^T \frac{d\delta \phi^T}{dx} + Q_x^T \left(\delta \phi^T + \frac{d\delta w_0^T}{dx} \right) \right] dx.
\end{aligned}$$

Aquí, σ_{xx} es la tensión normal, σ_{xz} la tensión transversal de corte, y M_{xx}^T y Q_x^T son el momento de flexión y la fuerza de corte, respectivamente:

$$M_{xx}^T = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad Q_x^T = \int_A \sigma_{xz} dA.$$

Como antes, asumimos que la carga transversal $q(x)$ actúa sobre el eje centroidal de la viga de Timoshenko. La energía potencial virtual de la carga transversal q está dada por

$$\delta V = - \int_0^L q(x) \delta w_0^T dx \quad (2.10)$$

Sustituyendo las expresiones para δU y δV en $\delta W = \delta U + \delta V$, e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L \left[M_{xx}^T \frac{d\delta \phi^T}{dx} + Q_x^T \left(\delta \phi^T + \frac{d\delta w_0^T}{dx} \right) - \delta w_0^T q \right] dx \\
&= \int_0^L \left[\left(-\frac{dM_{xx}^T}{dx} + Q_x^T \right) \delta \phi^T + \left(-\frac{dQ_x^T}{dx} - q \right) \delta w_0^T \right] dx + [M_{xx}^T \delta \phi^T + Q_x^T \delta w_0^T]_0^L
\end{aligned}$$

Sustituyendo los coeficientes δw_0^T y $\delta \phi^T$ en $0 < x < L$ por 0, obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$-\frac{dM_{xx}^T}{dx} + Q_x^T = 0, \quad -\frac{dQ_x^T}{dx} = q \quad (2.11)$$

Las condiciones de contorno de la teoría de vigas de Timoshenko que se tienen que especificar son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} w_0^T \\ \phi^T \end{array} \right\} \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{c} Q_x^T \\ M_{xx}^T \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

Usando las relaciones constitutivas

$$\sigma_{xx} = E_x \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}, \quad (2.13)$$

donde G_{xz} es el módulo de corte, podemos expresar el momento de flector y la fuerza de corte en términos de los desplazamientos generalizados (w_0^T, ϕ^T)

$$M_{xx}^T = \int_A z \sigma_{xx} = D_{xx} \frac{d\phi^T}{dx} \quad (2.14)$$

$$Q_x^T = K_s \int_A \sigma_{xz} dA = K_s A_{xz} \left(\phi^T + \frac{dw_0^T}{dx} \right), \quad (2.15)$$

donde

$$D_{xx} = \int_A E_x z^2 dA = E_x I_{yy}, \quad A_{xz} = \int_A G_{xz} dA = G_{xz} A,$$

y K_s es el factor de corrección de corte que introducimos para compensar el error que aparece por suponer una distribución de esfuerzo de corte constante a través del espesor de la viga.

Si sustituimos el momento flector y la fuerza de corte en las ecuaciones (2.14) y (2.15) en (2.11) y (2.12), obtenemos las ecuaciones y condiciones de contorno en términos de los desplazamientos generalizados:

$$-\frac{d}{dx} \left(D_{xx} \frac{d\phi^T}{dx} \right) + K_s A_{xz} \left(\phi^T + \frac{dw_0^T}{dx} \right) = 0 \quad (2.16)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[K_s A_{xz} \left(\phi^T + \frac{dw_0^T}{dx} \right) \right] = q, \quad (2.17)$$

para $0 < x < L$ y

$$\left\{ \begin{array}{c} w_0^T \\ \phi^T \end{array} \right\} \circ \left\{ \begin{array}{c} K_s A_{xz} \left(\phi^T + \frac{dw_0^T}{dx} \right) \\ D_{xx} \frac{d\phi^T}{dx} \end{array} \right\}$$

especificados en la frontera.

Las condiciones de frontera comunes asociadas con la teoría de vigas de Timoshenko se dan a continuación:

- **Viga simplemente apoyada** : El desplazamiento w_0^T es cero y la fuerza de corte Q_x^T es desconocida. Además, el momento flector M_{xx}^T es conocido, mientras la rotación ϕ^T es desconocida.
- **Viga empotrada** : El desplazamiento transversal w_0^T y la rotación ϕ^T son cero, mientras que el momento flector y la fuerza de corte son incógnitas.
- **Viga libre** : En este caso, el desplazamiento transversal y la rotación son desconocidas, mientras el momento flector M_{xx}^T y la fuerza de corte Q_x^T se conocen.

Capítulo 3

Método de elementos finitos libres de bloqueo para problemas de vigas

Este capítulo tiene como objetivo analizar una formulación para estudiar la deformación de una viga modelada por las ecuaciones de Timoshenko. Dicha formulación se obtiene eliminando la variable rotación en términos de las deformaciones transversales. Para esto, introduciremos una variable en el modelo, la cual nos ayudará a obtener una formulación variacional, donde el desplazamiento transversal será discretizado en $H^2(I)$, debido a la aparición de segundas derivadas en dicha formulación. Esta idea fue usada recientemente en [4] para placas Reissner-Mindlin. Mostraremos que la formulación variacional resultante posee una única solución que dependerá continuamente de los datos. También estableceremos resultados de regularidad adicional de dicha solución. Además, escribiremos un esquema discreto y obtendremos estimaciones del error con constantes independientes del espesor de la viga.

3.1. Formulación variacional

Iniciaremos esta sección analizando el modelo clásico de vigas de Timoshenko descrito por las ecuaciones (2.16) y (2.17), donde la deformación de la viga se describe en términos del desplazamiento transversal w y la rotación de la sección transversal β . Luego dicho modelo será reformulado en términos de un cambio de variable adecuado. Sea x la coordenada en la dirección axial. Las ecuaciones para el desplazamiento de una viga de Timoshenko

empotrada, sometida a carga distribuida $\widehat{f}(x)$ y el momento de carga $\widehat{g}(x)$ es la siguiente (ver [13, 15]):

Problema 3.1 Hallar $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_I \mathbb{E}(x) \mathbb{I}(x) \beta'(x) \xi'(x) dx + \int_I G(x) A(x) k_c(x) (\beta(x) - w'(x)) (\xi(x) - v'(x)) dx \\ = \int_I \widehat{f}(x) v(x) dx + \int_I \widehat{g}(x) \xi(x) dx \quad \forall (\xi, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I). \end{aligned}$$

En este modelo se tiene que:

Variable	Descripción
$\mathbb{E}(x)$	Módulo de Young
$\mathbb{I}(x)$	Momento de inercia de la sección transversal
$A(x)$	Área de la sección transversal
$G(x) = \mathbb{E}(x) / (2(1 + \nu(x)))$	Módulo de corte, con $\nu(x)$ el radio de Poisson
$k_c(x)$	Factor de corrección
$I := (0, L)$	L largo de la viga

Es bien conocido que cuando el espesor de la viga es pequeño y el Problema 3.1 se discretiza con elementos finitos estandar, se produce el fenómeno de bloqueo, el cual es consecuencia de la diferencia entre la magnitud de los coeficientes y las diferentes variables del modelo (ver [3]). Una estrategia adecuada para analizar este problema, consiste en reescalar el Problema 3.1 para así identificar una familia de problemas con un límite bien puesto a medida que el espesor tiende a cero. Con este objetivo, introducimos el siguiente parámetro asociado al espesor de la viga,

$$t^2 := \frac{1}{L} \int_I \frac{\mathbb{I}(x)}{A(x)L^2} dx,$$

el cual asumimos puede tomar valores en el intervalo $(0, 1]$. Definimos además

$$g(x) := \frac{\widehat{g}(x)}{t^3}, \quad f(x) := \frac{\widehat{f}(x)}{t^3}, \quad \kappa(x) := \frac{G(x)A(x)k_c(x)}{t}, \quad E(x) := \frac{\mathbb{E}(x)\mathbb{I}(x)}{t^3}.$$

Asumiremos que $\kappa(x)$ es una función continua en \bar{I} . Supongamos que existen constantes

$\underline{E}, \overline{E}, \underline{\kappa}, \overline{\kappa} \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\overline{E} \geq E(x) \geq \underline{E} > 0 \quad \forall x \in I, \quad (3.1)$$

$$\overline{\kappa} \geq \kappa(x) \geq \underline{\kappa} > 0 \quad \forall x \in I. \quad (3.2)$$

Además, asumiremos que la derivadas $E'(x), \kappa'(x)$ y $\kappa''(x)$ son suaves a trozos. Más precisamente, existe una partición $0 = s_0 < \dots < s_n = L$, del intervalo I , donde $s_i, i = 1, \dots, n-1$ son los posibles puntos de discontinuidades de κ' y E . Si denotamos $S_i := (s_{i-1}, s_i)$, asumiremos que $\kappa'(x) \in L^\infty(I)$, $E_i(x) := E(x)|_{S_i} \in W^{2,\infty}(S_i)$ y $\kappa_i''(x) := \kappa''(x)|_{S_i} \in L^\infty(S_i)$, $i = 1, \dots, n$. Esta suposición sobre los parámetros físicos y geométricos nos permitirá realizar el análisis de la formulación.

Así, el Problema 3.1 se puede escribir equivalentemente de la siguiente manera, donde a partir de ahora omitimos la dependencia de la variable axial x :

Problema 3.2 *Hallar $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ tal que:*

$$\int_I E\beta'\xi' + \frac{1}{t^2} \int_I \kappa(\beta - w')(\xi - v') = \int_I f v + \int_I g \xi \quad \forall (\xi, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I).$$

Para cada $t > 0$, la forma bilineal del lado izquierdo en el Problema 3.2 es elíptica y por lo tanto por el Lema de Lax- Milgram, este problema tiene única solución que satisface la siguiente estimación:

$$\|w\|_{1,I} + \|\beta\|_{1,I} + t^{-2}\|\beta - w'\|_{0,I} \leq C(\|f\|_{0,I} + \|g\|_{0,I}).$$

Con el objetivo de demostrar regularidad adicional de la solución, introducimos como incógnita adicional el esfuerzo de corte escalado $V := t^{-2}\kappa(\beta - w')$. A continuación presentaremos una proposición que muestra la regularidad adicional para el Problema 3.2. Denotemos

$$\begin{aligned} X^1 &= \{v \in H^1(I) : v|_{S_i} \in H^2(S_i), i = 1, \dots, n\}, \\ X_0^1 &= \{v \in H_0^1(I) : v|_{S_i} \in H^2(S_i), i = 1, \dots, n\}, \\ X^2 &= \{v \in H^2(I) : v|_{S_i} \in H^3(S_i), i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Proposición 3.1 *Suponga que existe una partición $0 = s_0 < \dots < s_n = L$, del intervalo I , si denotamos $S_i := (s_{i-1}, s_i)$, $i = 1, \dots, n$. Además asumimos que $g, f \in H^1(S_i)$. Sea $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ la única solución del Problema 3.2. Entonces, existe una constante $C > 0$, independiente de t, g y f , tal que*

$$\begin{aligned} \|w\|_{2,I} + \|\beta\|_{1,I} + \|V\|_{1,I} &+ \left(\sum_{i=1}^n \|w'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \|\beta''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n \|\beta'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \|V''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\times \left(\|\kappa'\|_{\infty,I} + \max_{1 \leq i \leq n} \|\kappa_i''\|_{\infty,S_i} + \max_{1 \leq i \leq n} \|E_i'\|_{\infty,S_i} + \max_{1 \leq i \leq n} \|E_i''\|_{\infty,S_i} \right), \end{aligned}$$

donde $V := t^{-2}\kappa(\beta - w') \in L^2(I)$ es el esfuerzo de corte escalado.

Demostración. Consideremos la siguiente descomposición del esfuerzo de corte:

$$V := \psi' + k, \quad (3.3)$$

con $k := \left(\frac{1}{L} \int_I V \right) \in \mathbb{R}$ y $\psi \in H_0^1(I)$. Tenemos que el Problema 3.2 y el siguiente son equivalentes: Hallar $(\psi, \beta, k, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \times \mathbb{R} \times H_0^1(I)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_I \psi' v' = - \int_I f v \quad \forall v \in H_0^1(I), \\ \int_I E \beta' \eta' + \int_I k \eta = \int_I g \eta - \int_I \psi' \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(I), \\ \int_I \beta q - t^2 \int_I \frac{kq}{\kappa} = t^2 \int_I \frac{\psi' q}{\kappa} \quad \forall q \in \mathbb{R}, \\ \int_I w' \delta' = \int_I \beta \delta' - t^2 \int_I \frac{\delta' k}{\kappa} - t^2 \int_I \frac{\psi' \delta'}{\kappa} \quad \forall \delta \in H_0^1(I). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Para este problema, tenemos que para cualquier $t \in (0, 1]$ y $f, g \in L^2(I)$, existe una única solución $(\psi, \beta, k, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \times \mathbb{R} \times H_0^1(I)$. Más aún, existe una constante C

independiente t , g y f , tal que

$$\|\psi\|_{1,I} + \|\beta\|_{1,I} + |k| + \|w\|_{1,I} \leq C(\|g\|_{0,I} + \|f\|_{0,I}).$$

En efecto, dado $f \in L^2(I)$, por el Lema de Lax-Milgram, tenemos que existe una única $\psi \in H_0^1(I)$ solución de la primera ecuación de (3.4), que satisface $\|\psi\|_{1,I} \leq C\|f\|_{0,I}$. Ahora, para todo $t \in (0, 1]$ podemos aplicar el Teorema 5.1 de [3] para mostrar que existe una única solución $(\beta, k) \in H_0^1(I) \times \mathbb{R}$ de segunda y tercera ecuación de (3.4) y además

$$\|\beta\|_{1,I} + |k| \leq C(\|g\|_{0,I} + \|\psi'\|_{0,I}) \leq C(\|g\|_{0,I} + \|f\|_{0,I}),$$

donde la constante C es independiente de t . La estimación de $\|V\|_{1,I}$ se deriva de la descomposición (3.3) y de la regularidad adicional de $\psi'' = f$ en I . Así, concluimos de existe $C > 0$ independiente de t , f y g tal que

$$\|\beta\|_{1,I} + \|V\|_{1,I} \leq C(\|g\|_{0,I} + \|f\|_{0,I}). \quad (3.5)$$

Ahora, obtenemos por el Lema de Lax-Milgram, que existe una única solución $w \in H_0^1(I)$ de la cuarta ecuación de (3.4). Eligiendo $\delta = w$, obtenemos que

$$\|w\|_{1,I} \leq C(\|\beta\|_{0,I} + |k| + \|\psi'\|_{0,I}) \leq C(\|g\|_{0,I} + \|f\|_{0,I}).$$

Además, de la cuarta ecuación de (3.4) se puede concluir que $w \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$. En efecto, integrando por partes y usando la descomposición (3.3), se sigue que

$$\int_I w'' \delta = \int_I \beta' \delta - t^2 \int_I \left(\frac{V}{\kappa} \right)' \delta \quad \forall \delta \in H_0^1(I).$$

Así, considerando $\delta \in \mathcal{D}(S_i)$ obtenemos que

$$w'' = \beta' - t^2 \left(\frac{V}{\kappa} \right)' = \beta' - t^2 \left(\frac{V' \kappa - V \kappa'}{\kappa^2} \right) \in I. \quad (3.6)$$

Luego, tomando norma $L^2(I)$, usando desigualdad triangular, considerando que $\kappa \leq \bar{\kappa}$, $\kappa' \in L^\infty(I)$ y que $t < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|w''\|_{0,I} &\leq C(\|\beta'\|_{0,I} + \|V'\|_{0,I} + \|V\|_{0,I} \|\kappa'\|_{\infty,I}), \\ &\leq C(2 + \|\kappa'\|_{\infty,I})(\|g\|_{0,I} + \|f\|_{0,I}), \end{aligned}$$

de donde se concluye que $w'' \in L^2(I)$, lo cual implica que $w \in H^2(I)$.

A continuación, para todo $i = 1, \dots, n$, considerando $v \in \mathcal{D}(S_i)$, tenemos del sistema (3.4) primera ecuación y de la descomposición (3.3) que:

$$\psi'' = V' = f \quad \text{en } S_i \iff V'' = f' \in L^2(S_i) \quad \text{en } S_i.$$

Tomando norma en S_i y sumando sobre i tenemos que:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|V''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.7)$$

Ahora, usando la segunda ecuación del sistema (3.4), integrando por partes y usando la descomposición (3.3) tenemos lo siguiente:

$$\int_I (E\beta')' \eta = \int_I V\eta - \int_I g\eta \quad \forall \eta \in H_0^1(I).$$

Luego, para todo $i = 1, \dots, n$, considerando $\eta \in \mathcal{D}(S_i)$, tenemos que

$$(E\beta')' = V - g \quad \text{en } S_i,$$

implicando que

$$\beta''|_{S_i} = \frac{V - g|_{S_i} - E'_i \beta'|_{S_i}}{E_i} \quad (3.8)$$

Ahora, tomando norma en S_i y en virtud de (3.1), se tiene

$$\|\beta''\|_{0,S_i}^2 \leq C (\|V\|_{0,S_i} + \|g\|_{0,I} + \|E'_i\|_{\infty,S_i} \|\beta'\|_{0,S_i})^2 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Luego, sumando sobre i y en virtud de (3.5) obtenemos lo siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\beta''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \leq C (\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2)^{1/2} \times \left(2 + \max_{1 \leq i \leq n} \|E'_i\|_{\infty,S_i} \right). \quad (3.9)$$

Derivando $\beta''|_{S_i}$ en (3.8), para todo $i = 1, \dots, n$, tenemos que

$$\beta'''|_{S_i} = \frac{E_i (V'|_{S_i} - g'|_{S_i} - E''_i \beta'|_{S_i} - E'_i \beta''|_{S_i}) - E'_i V|_{S_i} + E'_i g|_{S_i} - (E'_i)^2 \beta'|_{S_i}}{E_i^2},$$

tomando norma en S_i y en virtud de (3.1), se tiene

$$\begin{aligned} \|\beta'''\|_{0,S_i}^2 &\leq C (\|V'\|_{0,S_i} + \|g'\|_{0,S_i} + \|E''_i\|_{\infty,S_i} \|\beta'\|_{0,S_i} \\ &+ \|E'_i\|_{\infty,S_i} \|\beta''\|_{0,S_i} + \|E'_i\|_{\infty,S_i} \|V\|_{0,S_i} + \|E'_i\|_{\infty,S_i} \|g\|_{0,S_i} + \|E'_i\|_{\infty,S_i}^2 \|\beta'\|_{0,S_i})^2 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Luego, sumando sobre i y en virtud de (3.5) obtenemos lo siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\beta'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \times \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|E'_i\|_{\infty,S_i}^2 + \max_{1 \leq i \leq n} \|E''_i\|_{\infty,S_i} \right),$$

Derivando w'' en (3.6), para todo $i = 1, \dots, n$, se sigue que

$$\begin{aligned} w''' &= \beta'' - t^2 \left(\frac{V'\kappa - V\kappa'}{\kappa^2} \right)' \quad \text{en } S_i, \\ &= \beta'' + \frac{[V''\kappa - V\kappa'']\kappa^2 - [V'\kappa - V\kappa']2\kappa}{\kappa^4} \quad \text{en } S_i, \\ &= \beta'' + \frac{[2\kappa\kappa' - k^2\kappa'']V - 2\kappa^2V' + \kappa^3V''}{\kappa^4} \quad \text{en } S_i. \end{aligned}$$

Ahora, tomando norma en S_i y en virtud de (3.2), se tiene

$$\|w'''\|_{0,S_i}^2 \leq C \left(\|\beta''\|_{0,S_i} + (\|\kappa'_i\|_{\infty,S_i} + \|\kappa''_i\|_{\infty,S_i})\|V\|_{0,S_i} + \|V'\|_{0,S_i} + \|V''\|_{0,S_i} \right)^2.$$

Así, sumando sobre i , considerando (3.7) y (3.9), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|w'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} &\leq C \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\|\kappa'\|_{\infty,I} + \max_{1 \leq i \leq n} \|\kappa''_i\|_{\infty,S_i} + \max_{1 \leq i \leq n} \|E'_i\|_{\infty,S_i} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, de las desigualdades anteriores y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos:

$$\begin{aligned} \|w\|_{2,I} + \|\beta\|_{1,I} + \|V\|_{1,I} &+ \left(\sum_{i=1}^n \|w'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \|\beta''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n \|\beta'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \|V''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\|\kappa'\|_{\infty,I} + \max_{1 \leq i \leq n} \|\kappa''_i\|_{\infty,S_i} + \max_{1 \leq i \leq n} \|E'_i\|_{\infty,S_i}^2 + \max_{1 \leq i \leq n} \|E''_i\|_{\infty,S_i} \right), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Observación 3.1 *Es importante resaltar que en el resultado anterior se usa que $\kappa(x) \in C^0(\bar{I})$ y que $\kappa' \in L^\infty(I)$. Si esto no ocurre entonces dicho resultados no es válido.*

Considerando el siguiente cambio de variables:

$$\gamma := \beta - w', \quad (3.10)$$

donde la interpretación física para γ es la deformación de corte transversal, el modelo descrito en el Problema 3.2 se puede escribir de forma equivalente como (ver Lema 3.1):

Problema 3.3 *Hallar $(\gamma, w) \in H$ tal que*

$$\int_I E (\gamma + w')' (\eta + v')' + t^{-2} \int_I \kappa \gamma \eta = \int_I f v + \int_I g (\eta + v') \quad \forall (\eta, v) \in H,$$

donde $H := \{(\eta, v) \in H^1(I) \times H^2(I) : v(0) = v(L) = 0 \text{ y } (\eta + v')(0) = (\eta + v')(L) = 0\}$.

Este espacio H se dotará de la siguiente norma de la energía que depende del espesor de la viga:

$$\|(\eta, v)\|_H^2 = \|\eta + v'\|_{1,I}^2 + t^{-2} \|\eta\|_{0,I}^2 + \|v\|_{1,I}^2.$$

Observación 3.2 *La idea del cambio de variable (3.10), donde la rotación se escribe en terminos de deformación de corte transversal y la derivada del desplazamiento transversal ha sido recientemente usada en [4] para placas Reissner-Mindlin.*

Observación 3.3 *Es posible relacionar el esfuerzo de corte escalado con la deformación de corte transversal. En efecto,*

$$V = t^{-2} \kappa (\beta - w') = t^{-2} \kappa \gamma \quad \text{en } I. \quad (3.11)$$

Reescribimos el Problema 3.3 de la siguiente manera:

Problema 3.4 Hallar $(\gamma, w) \in H$ tal que

$$A((\gamma, w), (\eta, v)) = F(\eta, v) \quad \forall (\eta, v) \in H,$$

donde la forma bilineal $A : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ están definidos por:

$$\begin{aligned} A((\gamma, w), (\eta, v)) &= \int_I E(\gamma + w')'(\eta + v)' + t^{-2} \int_I \kappa \gamma \eta \quad \forall (\gamma, w), (\eta, v) \in H, \\ F(\eta, v) &= \int_I f v + \int_I g(\eta + v) \quad \forall (\eta, v) \in H. \end{aligned}$$

A continuación presentaremos un resultado que establece la equivalencia entre los Problemas 3.2 y 3.4.

Lema 3.1 Los Problemas 3.2 y 3.4 son equivalentes, esto es $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ es solución del Problema 3.2 si y sólo si $(\gamma, w) \in H$ es solución del Problema 3.4, donde $\gamma := \beta + w'$.

Demostración. Sea $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ solución del Problema 3.2. De la Proposición 3.1 tenemos que $w \in H^2(I)$, luego definiendo $\gamma := \beta - w' \in H^1(I)$, tenemos que $(\gamma, w) \in H$.

Ahora, notamos primero que la formulación variacional del Problema 3.2 tiene como problema fuerte asociado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} -[E\beta']' + t^{-2}\kappa(\beta - w') = g & \text{en } I, \\ t^{-2}[\kappa(\beta - w')] = f & \text{en } I, \\ w(0) = \beta(0) = w(L) = \beta(L) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

El modelo anterior es reformulado considerando $\gamma := \beta + w'$. Así el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.12) se puede escribir de forma equivalente como:

$$\begin{cases} -[E(\gamma + w')]' + t^{-2}\kappa\gamma = g & \text{en } I, \\ t^{-2}[\kappa\gamma]' = f & \text{en } I, \\ w(0) = (\gamma + w')(0) = w(L) = (\gamma + w')(L) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

A continuación, sea $(\eta, v) \in H$ testeando la primera ecuación de (3.13) con una función test $\eta + v'$ e integrando por partes, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_I g(\eta + v') &= - \int_I [E(\gamma + w')] (\eta + v') + t^{-2} \int_I \kappa \gamma (\eta + v'), \\
&= \int_I E(\gamma + w')' (\eta + v') + [E(\gamma + w')] (\eta + v') \Big|_0^L + t^{-2} \int_I \kappa \gamma (\eta + v'), \\
&= \int_I E(\gamma + w')' (\eta + v') + t^{-2} \int_I \kappa \gamma (\eta + v') \quad \forall (\eta, v) \in H. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Testeando la segunda ecuación de (3.13) con la función test v e integrando por partes, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_I f v &= t^{-2} \int_I [\kappa \gamma]' v, \\
&= -t^{-2} \int_I \kappa \gamma v' + [\kappa \gamma]' v \Big|_0^L, \\
&= -t^{-2} \int_I \kappa \gamma v' \quad \forall (\eta, v) \in H. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Así, sumando (3.14) y (3.15), tenemos que el sistema (3.13) es equivalente al Problema 3.4.

Recíprocamente, sea $(\gamma, w) \in H$ solución del Problema 3.4. Como $w \in H^2(I)$ y considerando la primera condición de contorno $w(0) = w(L) = 0$ del espacio H se tiene que $w \in H_0^1(I)$.

Ahora, definiendo $\beta := \gamma + w' \in L^2(I)$ y derivando esta variable se sigue que:

$$\beta' = \gamma' + w'' \in L^2(I) \implies \beta \in H^1(I).$$

Utilizando la segunda condición de contorno del espacio H tenemos que:

$$0 = (\gamma + w')(0) = \beta(0) = (\gamma + w')(L) = \beta(L),$$

se sigue que $\beta \in H_0^1(I)$. Finalmente, notar que del Problema 3.4 se puede obtener el Problema 3.2, considerando la equivalencia de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.13) y (3.12).

□

A continuación, analizaremos existencia y unicidad de solución de la formulación presentada en el Problema 3.4 y estableceremos resultados de regularidad adicional de dicha solución.

Primero mostraremos que la forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$ y el funcional $F(\cdot)$ están acotados con constantes independientes del espesor de la viga. Para demostrar la continuidad de la forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$ usaremos desigualdad triangular, la desigualdad Cauchy-Schwarz y las hipótesis sobre los parámetros E y κ . En efecto:

$$\begin{aligned}
|A((\gamma, w), (\eta, v))| &\leq \left| \int_I E (\gamma + w')' (\eta + v)' \right| + t^{-2} \left| \int_I \kappa \gamma \eta \right| \\
&\leq \bar{E} \|(\gamma + w')'\|_{0,I} \|(\eta + v)'\|_{0,I} + t^{-2} \bar{\kappa} \|\gamma\|_{0,I} \|\eta\|_{0,I} \\
&\leq \bar{E} \|\gamma + w'\|_{1,I} \|\eta + v'\|_{1,I} + t^{-2} \bar{\kappa} \|\gamma\|_{0,I} \|\eta\|_{0,I} \\
&\leq C_1 \left\{ \|\gamma + w'\|_{1,I} \|\eta + v'\|_{1,I} + t^{-2} \|\gamma\|_{0,I} \|\eta\|_{0,I} \right\} \\
&\leq C_1 \left\{ \|\gamma + w'\|_{1,I}^2 + t^{-2} \|\gamma\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \|\eta + v'\|_{1,I}^2 + t^{-2} \|\eta\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq C_1 \|(\gamma, w)\|_H \|(\eta, v)\|_H,
\end{aligned}$$

donde la constante $C_1 = \{\bar{E}, \bar{\kappa}\}$ es independiente de t .

Ahora, para el funcional lineal $F(\cdot)$, usaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|F(\eta, v)| &\leq \left| \int_I f v \right| + \left| \int_I g(\eta + v') \right| \\
&\leq \|f\|_{0,I} \|v\|_{0,I} + \|g\|_{0,I} \|\eta + v'\|_{0,I} \\
&\leq \left\{ \|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \|v\|_{1,I}^2 + \|\eta + v'\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq C_2 \left\{ \|v\|_{1,I}^2 + \|\eta + v'\|_{1,I}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq C_2 \|(\eta, v)\|_H,
\end{aligned}$$

donde $C_2 = \left\{ \|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2}$.

De este modo hemos visto que la forma bilineal y el funcional son acotados con constantes independientes de t .

A continuación enunciaremos dos lemas que nos ayudarán a mostrar que la forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$ es H -elíptica.

Lema 3.2 *Sea $I = (0, L)$, entonces existe una constante $C_3 = C_3(I) > 0$ independiente de t , tal que*

$$C_3 \|\eta + v'\|_{1,I}^2 \leq \|(\eta + v')'\|_{0,I}^2 \quad \forall (\eta, v) \in H$$

Demostración. Sea $(\eta, v) \in H$ y $x \in (0, L)$, usando que $(\eta + v')(0) = 0$ se sigue que

$$\begin{aligned} |(\eta + v')(x)| &= |(\eta + v')(x) - (\eta + v')(0)| \\ &= \left| \int_0^x (\eta + v')'(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^x |1 \cdot (\eta + v')'(s) ds| \\ &\leq \left(\int_0^x 1^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^x |(\eta + v')'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq x^{1/2} \|(\eta + v')'\|_{0,I}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|\eta + v'\|_{0,I}^2 &= \int_0^L |(\eta + v')(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^L x \|(\eta + v')'\|_{0,I}^2 dx \\ &= \frac{L^2}{2} \|(\eta + v')'\|_{0,I}^2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Así,

$$\frac{2}{L^2 + 2} \|\eta + v'\|_{1,I}^2 \leq \|(\eta + v')'\|_{0,I}^2,$$

donde $C_3 = \frac{2}{L^2 + 2}$. □

Lema 3.3 Sea $I = (0, L)$, entonces existe una constante $C_4 = C_4(I) > 0$ independiente de t , tal que

$$C_4 \|v\|_{1,I}^2 \leq \|\eta + v'\|_{0,I}^2 + t^{-2}\|\eta\|_{0,I}^2 \quad \forall (\eta, v) \in H.$$

Demostración. Primero notar que por desigualdad triangular obtenemos

$$\|v'\|_{0,I} \leq \|\eta + v'\|_{0,I} + \|\eta\|_{0,I}.$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Poincaré y la desigualdad anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \|v\|_{1,I}^2 &\leq \frac{L^2 + 2}{2} \|v'\|_{0,I}^2 \\ &\leq \frac{L^2 + 2}{2} \left(\|\eta + v'\|_{0,I}^2 + 2\|\eta - v'\|_{0,I}\|\eta\|_{0,I} + \|\eta\|_{0,I}^2 \right) \\ &= \frac{L^2 + 2}{2} \left(\|\eta + v'\|_{0,I}^2 + 2tt^{-1}\|\eta + v'\|_{0,I}\|\eta\|_{0,I} + \|\eta\|_{0,I}^2 \right) \\ &\leq \frac{L^2 + 2}{2} \left(\|\eta + v'\|_{0,I}^2 + t^2\|\eta + v'\|_{0,I}^2 + t^{-2}\|\eta\|_{0,I}^2 + t^2t^{-2}\|\eta\|_{0,I}^2 \right) \\ &\leq (L^2 + 2) (\|\eta + v'\|_{0,I}^2 + t^{-2}\|\eta\|_{0,I}^2). \end{aligned}$$

Así,

$$C_4 \|v\|_{1,I}^2 \leq \|\eta + v'\|_{0,I}^2 + t^{-2}\|\eta\|_{0,I}^2,$$

donde $C_4 = \frac{1}{L^2 + 2}$. □

Gracias a los lemas anteriores podemos presentar el siguiente resultado que muestra la H -elípticidad de forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$ con constante independiente del espesor t .

Lema 3.4 Existe $\alpha > 0$, independiente de t tal que

$$A((\eta, v), (\eta, v)) \geq \alpha \|(\eta, v)\|_H^2 \quad \forall (\eta, v) \in H.$$

Demostración. Sea $(\eta, v) \in H$. De acuerdo a la definición de la forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$, tenemos

$$A((\eta, v), (\eta, v)) = \int_I E [(\eta + v)']^2 + t^{-2} \int_I \kappa \eta^2 \quad \forall (\eta, v) \in H,$$

ahora utilizando (3.1) y (3.2), y separando términos tenemos que:

$$\begin{aligned} A((\eta, v), (\eta, v)) &\geq \underline{E} \|(\eta + v)'\|_{0,I}^2 + t^{-2} \underline{\kappa} \|\eta\|_{0,I}^2, \\ &\geq \frac{\underline{E}}{2} \|(\eta + v)'\|_{0,I}^2 + \frac{\underline{E}}{2} \|(\eta + v)'\|_{0,I}^2 + \frac{t^{-2} \underline{\kappa}}{2} \|\eta\|_{0,I}^2 + \frac{t^{-2} \underline{\kappa}}{2} \|\eta\|_{0,I}^2, \end{aligned}$$

aplicando el Lema 3.2 al primer término $\frac{\underline{E}}{2} \|(\eta + v)'\|_{0,I}^2$ y (3.16) al segundo término, se sigue que:

$$\begin{aligned} A((\eta, v), (\eta, v)) &\geq \frac{\underline{E}}{L^2 + 2} \|\eta + v\|_{1,I}^2 + \frac{\underline{E}}{L^2} \|\eta + v\|_{0,I}^2 + \frac{t^{-2} \underline{\kappa}}{2} \|\eta\|_{0,I}^2 + \frac{t^{-2} \underline{\kappa}}{2} \|\eta\|_{0,I}^2, \\ &\geq \frac{\underline{E}}{L^2 + 2} \|\eta + v\|_{1,I}^2 + \frac{t^{-2} \underline{\kappa}}{2} \|\eta\|_{0,I}^2 + \alpha_1 \left\{ \|\eta + v\|_{0,I}^2 + t^{-2} \|\eta\|_{0,I}^2 \right\}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 = \min \left\{ \frac{\underline{E}}{L^2}, \frac{\underline{\kappa}}{2} \right\}$, usando el Lema 3.3 sobre $\alpha_1 \left\{ \|\eta + v\|_{0,I}^2 + t^{-2} \|\eta\|_{0,I}^2 \right\}$ tenemos:

$$A((\eta, v), (\eta, v)) \geq \frac{\underline{E}}{L^2 + 2} \|\eta + v\|_{1,I}^2 + \frac{t^{-2} \underline{\kappa}}{2} \|\eta\|_{0,I}^2 + \frac{\alpha_1}{L^2 + 2} \|v\|_{1,I},$$

finalmente tomando mínimo sobre todos los términos, se concluye que:

$$\begin{aligned} A((\eta, v), (\eta, v)) &\geq \alpha \left\{ \|\eta + v\|_{1,I}^2 + t^{-2} \|\eta\|_{0,I}^2 + \|v\|_{1,I}^2 \right\} \\ &= \alpha \|(\eta, v)\|_H^2 \end{aligned}$$

donde $\alpha = \min \left\{ \frac{\underline{E}}{L^2 + 2}, \frac{\underline{\kappa}}{2}, \frac{\alpha_1}{L^2 + 2} \right\}$. Lo que concluye la demostración. \square

A continuación presentamos el resultado de existencia y unicidad del Problema variacional 3.4.

Teorema 3.1 *Existe una única solución $(\gamma, w) \in H$ del Problema 3.4 que satisface la siguiente estimación:*

$$\|(\gamma, w)\|_H \leq C (\|f\|_{0,I} + \|g\|_{0,I}), \quad (3.17)$$

donde C es independiente del espesor t .

Demostración. En virtud del Lema 3.4, la demostración se obtiene de la aplicación directa del Lema de Lax-Milgram (Ver Teorema 1.1). \square

En lo que sigue, estableceremos un resultado que muestra regularidad adicional de la deformación de corte transversal γ , el cual será usado para establecer la estimación de error del método que introduciremos en la siguiente sección.

Proposición 3.2 *Sea $g, f \in H^1(S_i)$ y sea (γ, w) la única solución del Problema 3.4. Entonces $\gamma \in X^1$, y*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n t^{-2} \|\gamma''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} &\leq C \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(2 + \|\kappa'\|_{\infty,I} + \max_{1 \leq i \leq n} \|\kappa_i''\|_{\infty,S_i} \right), \end{aligned}$$

donde C es independiente del espesor t .

Demostración. Para establecer este resultado usaremos la Proposición 3.1 y (3.11). En efecto, por (3.11) se tiene que $t^{-2}\gamma = \frac{V}{\kappa}$. Luego derivando dos veces se sigue que

$$\begin{aligned} t^{-2}\gamma'' &= \left[\frac{V}{\kappa} \right]'' = \left[\frac{V'\kappa - V\kappa'}{\kappa^2} \right]' \quad \text{en } S_i, \\ &= \frac{[V''\kappa - V\kappa'']\kappa^2 - [V'\kappa - V\kappa']2\kappa}{\kappa^4} \\ &= \frac{[2\kappa\kappa' - \kappa^2\kappa'']V - 2\kappa^2V' + \kappa^3V''}{\kappa^4} \end{aligned}$$

Luego, tomando norma en S_i y usando (3.2) obtenemos que

$$t^{-2}\|\gamma''\|_{0,S_i}^2 \leq C \left((\|\kappa_i'\|_{\infty,S_i} + \|\kappa_i''\|_{\infty,S_i}) \|V\|_{0,S_i} + \|V'\|_{0,S_i} + \|V''\|_{0,S_i} \right)^2.$$

Así, sumando sobre i y considerando la Proposición 3.1, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n t^{-2} \|\gamma''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} &\leq C \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(2 + \|\kappa'\|_{\infty,I} + \max_{1 \leq i \leq n} \|\kappa_i''\|_{\infty,S_i} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\gamma \in X^1$. □

3.2. Esquema Discreto

En esta sección, introduciremos un esquema discreto basado en elementos finitos para el problema de la viga de Timoshenko. Con este objetivo, primero consideramos una familia de particiones del intervalo I

$$\mathcal{T}_h := 0 = x_0 < \dots < x_N = L.$$

Denotamos $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, de longitud $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, N$ y denotamos por $h := \max_{1 \leq j \leq N} h_j$.

Para aproximar la deformación de corte transversal, consideramos el espacio de las funciones lineales a trozos y continuas:

$$V_h := \{\eta_h \in H^1(I) : \eta_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1(I_j), j = 1, \dots, N\} \subset H^1(I).$$

Ahora, para $\eta \in H^1(I)$, introducimos su interpolante de Lagrange $\mathcal{L}(\eta) \in V_h$, que satisface:

$$\begin{aligned} \|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{1,I} &\leq Ch \left(\sum_{i=1}^n \|\eta''\|_{0,I_j}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \eta \in \tilde{X}^1, \\ \|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{0,I} &\leq Ch^2 \left(\sum_{i=1}^n \|\eta''\|_{0,I_j}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \eta \in \tilde{X}^1, \end{aligned}$$

donde $\tilde{X}^1 := \{v \in H^1(I) : v|_{I_j} \in H^2(I_j), j = 1, \dots, n\}$.

Para aproximar el desplazamiento transversal, usaremos el espacio de Hermite, definido por:

$$Q_h := \{w_h \in H^2(I) : w_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_3(I_j), j = 1, \dots, N\} \subset H^2(I).$$

Así, para $v \in H^2(I)$, consideramos su interpolante de Hermite $\mathcal{I}(v) \in Q_h$, que satisface las siguientes estimaciones del error (ver [1, 2]):

$$\begin{aligned} \|v - \mathcal{I}(v)\|_{2,I} &\leq Ch \left(\sum_{i=1}^n \|v'''\|_{0,I_j}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in \tilde{X}^2, \\ \|v - \mathcal{I}(v)\|_{1,I} &\leq Ch^2 \left(\sum_{i=1}^n \|v'''\|_{0,I_j}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in \tilde{X}^2, \end{aligned}$$

$$\|v - \mathcal{I}(v)\|_{0,I} \leq Ch^3 \left(\sum_{i=1}^n \|v'''\|_{0,I_j}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in \tilde{X}^2,$$

donde

$$\tilde{X}^2 := \{v \in H^2(I) : v|_{I_j} \in H^3(I_j), j = 1, \dots, n\},$$

Introducimos el siguiente espacio discreto:

$$H_h = \{(\eta_h, v_h) \in V_h \times Q_h : v_h(0) = v_h(L) = 0 \text{ y } (\eta_h - v_h')(0) = (\eta_h - v_h')(L) = 0\}.$$

Por otro lado, dado $(\eta, v) \in H$ podemos definir el interpolante que nos ayudará a probar estimaciones del error:

$$\tilde{\Pi}(\eta, v) := (\mathcal{L}(\eta), \mathcal{I}(v)), \quad (3.18)$$

A continuación presentaremos una proposición que establece estimaciones del error para el interpolante $\tilde{\Pi} : H \rightarrow H_h$ en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

Proposición 3.3 *Para $(\eta, v) \in H$ se tiene que $\tilde{\Pi}(\eta, v) \in H_h$. Además, satisface la siguiente estimación*

$$\|(\eta, v) - \tilde{\Pi}(\eta, v)\|_H \leq Ch \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|v'''\|_{0,I_j}^2 \right)^{1/2} + t^{-2} \left(\sum_{i=1}^n \|\eta''\|_{0,I_j}^2 \right)^{1/2} \right\} \quad (3.19)$$

Demostración. Notamos primero que dado $(\eta, v) \in H$ tenemos que

$$\tilde{\Pi}(\eta, v) = (\mathcal{L}(\eta), \mathcal{I}(v)) := (\eta_h, v_h) \in V_h \times Q_h.$$

De este modo $\tilde{\Pi} : H \rightarrow V_h \times Q_h$. Ahora, para poder mostrar que $\tilde{\Pi}(\eta, v) \in H_h$ solo nos falta ver que el interpolante $\tilde{\Pi}$ preserva las condiciones de contorno. Esto es:

$$\mathcal{I}(v)(0) = \mathcal{I}(v)(L) = 0 \quad \text{y} \quad (\mathcal{L}(\eta) + \mathcal{I}(v)')(0) = (\mathcal{L}(\eta) + \mathcal{I}(v)')(L) = 0.$$

En efecto, notamos que por propiedades del interpolante \mathcal{I} tenemos que:

$$\mathcal{I}(v)(0) = v_h(0) = v(0) = 0,$$

el caso $\mathcal{I}(v)(L) = 0$ es análogo a lo anterior. Para $(\mathcal{L}(\eta) + \mathcal{I}(v)')(0)$ observamos que:

$$(\mathcal{L}(\eta) + \mathcal{I}(v)')(0) = \mathcal{L}(\eta)(0) + \mathcal{I}(v)'(0) = \eta_h(0) + v_h'(0) = \eta(0) + v'(0) = (\eta + v')(0) = 0,$$

pues $(\eta, v) \in H$. El caso $(\mathcal{L}(\eta) + \mathcal{I}(v)')(0)$ es análogo a lo anterior.

Para la demostración de la estimación (3.19) usamos la desigualdad triangular. En efecto, para $(\eta, v) \in H$ y considerando $(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{I}(v)) \in H_h$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|(\eta, v) - \tilde{\Pi}(\eta, v)\|_H &= \|(\eta, v) - (\mathcal{L}(\eta), \mathcal{I}(v))\|_H \\
&= \|(\eta - \mathcal{L}(\eta), v - \mathcal{I}(v))\|_H \\
&= \left\{ \|v - \mathcal{I}(v)\|_{1,I}^2 + \|(\eta - \mathcal{L}(\eta)) + (v - \mathcal{I}(v))'\|_{1,I}^2 + t^{-2}\|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \|v - \mathcal{I}(v)\|_{1,I}^2 + \|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{1,I}^2 + \|(v - \mathcal{I}(v))'\|_{1,I}^2 + t^{-2}\|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \|v - \mathcal{I}(v)\|_{1,I}^2 + t^{-2}t^2\|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{1,I}^2 + \|(v - \mathcal{I}(v))'\|_{1,I}^2 + t^{-2}\|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{0,I}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq C \left\{ \|v - \mathcal{I}(v)\|_{2,I}^2 + t^{-2}\|\eta - \mathcal{L}(\eta)\|_{1,I}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq C \left\{ h^2 \left(\sum_{i=1}^n \|v'''\|_{0,I_j}^2 \right) + t^{-2}h^2 \left(\sum_{i=1}^n \|\eta''\|_{0,I_j}^2 \right) \right\}^{1/2} \\
&= Ch \left\{ \sum_{i=1}^n \|v'''\|_{0,I_j}^2 + t^{-2} \sum_{i=1}^n \|\eta''\|_{0,I_j}^2 \right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

A continuación presentamos la discretización por elementos finitos del Problema 3.4, la cual consiste en:

Problema 3.5 Hallar $(\gamma_h, w_h) \in H_h$ tal que

$$A((\gamma_h, w_h), (\eta_h, v_h)) = F(\eta_h, v_h) \quad \forall (\eta_h, v_h) \in H_h,$$

donde la forma bilineal $A : H_h \times H_h \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : H_h \rightarrow \mathbb{R}$ están definidos por

$$\begin{aligned}
A((\gamma_h, w_h), (\eta_h, v_h)) &:= \int_I E(\gamma_h + w_h')'(\eta_h + v_h')' + t^{-2} \int_I \kappa \gamma_h \eta_h \quad \forall (\gamma_h, w_h), (\eta_h, v_h) \in H_h, \\
F(\eta_h, v_h) &:= \int_I f v_h + \int_I g(\eta_h + v_h') \quad \forall (\eta_h, v_h) \in H_h.
\end{aligned}$$

El siguiente resultado corresponde a la versión discreta del Teorema 3.1, donde concluimos la existencia, unicidad y estabilidad del Problema 3.5.

Teorema 3.2 *Existe una única solución $(\gamma_h, w_h) \in H_h$ del Problema 3.5 que satisfice la dependencia continua de los datos:*

$$\|(\gamma_h, w_h)\|_H \leq C (\|f\|_{0,I} + \|g\|_{0,I}),$$

y se tiene la siguiente estimación de Céa,

$$\|(\gamma, w) - (\gamma_h, w_h)\|_H \leq C \inf_{(\eta_h, v_h) \in H_h} \|(\gamma, w) - (\eta_h, v_h)\|_H,$$

donde C es independiente del espesor t y de h .

Demostración. Aplicación directa del Teorema 1.1 y Lema 1.1. □

Teorema 3.3 *Sean $(\gamma, w) \in H$ y $(\gamma_h, w_h) \in H_h$ las únicas soluciones de los Problemas continuo y discreto 3.4 y 3.5, respectivamente. Entonces, existe $C > 0$ independiente de t, h, f y g tal que*

$$\|(\gamma, w) - (\gamma_h, w_h)\|_H \leq Ch \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2}$$

Demostración. Aplicación directa del Teorema 3.2 y la estimación (3.19). □

Observación 3.4 *La solución del Problema 3.4 proporciona el desplazamiento y deformación de corte. Además, es posible obtener fácilmente la rotación β recordando que $\gamma = \beta - w'$. En el nivel discreto, esta estrategia corresponde al cálculo de la rotación como un post-procesamiento de la deformación de corte y el desplazamiento. Si $(\gamma_h, w_h) \in H_h$ es la única solución del Problema 3.5, entonces la función*

$$\beta_h := \gamma_h + w'_h,$$

es una aproximación de la rotación a nivel discreto.

Teorema 3.4 *Bajo las suposiciones del Teorema 3.3, se tienen las siguientes estimaciones del error para β :*

$$\|\beta - \beta_h\|_{1,I} \leq Ch \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

y

$$\|\beta - \beta_h\|_{0,I} \leq Ch^2 \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

donde $C > 0$ es independiente de h y t .

Demostración. Primero demostraremos (3.20). Considerando $\beta := \gamma + w'$, $\beta_h := \gamma_h + w'_h$ y el Teorema 3.3 se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\beta - \beta_h\|_{1,I} &= \|\gamma + w' - (\gamma_h + w'_h)\|_{1,I}, \\ &= \|(\gamma - \gamma_h) + (w - w'_h)'\|_{1,I}, \\ &\leq \|(\gamma, w) - (\gamma_h, w_h)\|_H, \\ &\leq Ch \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para la demostración de (3.21) usaremos un argumento de dualidad. Primero, consideremos los siguientes problemas que están bien puestos:

Hallar $(\phi, \rho) \in H$ tal que

$$\int_I E(\phi + \rho)'(\chi + u)' + t^{-2} \int_I \kappa \phi \chi = \int_I (\beta - \beta_h)(\chi + u) \quad \forall (\chi, u) \in H. \quad (3.22)$$

Hallar $(\phi_h, \rho_h) \in H_h$ tal que

$$\int_I E(\phi_h + \rho_h)'(\chi_h + u_h)' + t^{-2} \int_I \kappa \phi_h \chi_h = \int_I (\beta - \beta_h)(\chi_h + u_h) \quad \forall (\chi_h, u_h) \in H_h. \quad (3.23)$$

Repitiendo los argumentos usados para demostrar los Teoremas 3.1 y 3.2 se demuestra que (3.22) y (3.23) poseen única solución. Además se tiene que (3.22) satisface el siguiente resul-

tado de regularidad adicional: Existe una constante $C > 0$, independiente de t tal que

$$\begin{aligned}
\|\rho\|_{2,I} + \|\tilde{\beta}\|_{1,I} + \|\tilde{V}\|_{1,I} &+ \left(\sum_{i=1}^n \|\rho'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \|\tilde{\beta}''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^n \|\tilde{V}''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} + t^2 \left(\sum_{i=1}^n \|\gamma''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C\|\beta - \beta_h\|,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

donde $\tilde{\beta} := \phi + \rho'$ y $\tilde{V} := t^{-2}\kappa(\tilde{\beta} - \rho')$. En efecto, considerando la incógnita adicional $\tilde{\beta}$ y replicando los argumentos del Lema 3.1, podemos verificar que el sistema (3.22) y el siguiente son equivalentes: Hallar $(\tilde{\beta}, \rho) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ tal que:

$$\int_I E\tilde{\beta}'\xi' + \frac{1}{t^2} \int_I \kappa(\tilde{\beta} - \rho')(\xi - v') = \int_I (\beta - \beta_h)\xi \quad \forall (\xi, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I). \tag{3.25}$$

Ahora, usando la variable \tilde{V} y su descomposición

$$\tilde{V} := \lambda' + r, \tag{3.26}$$

con $r := \left(\frac{1}{L} \int_I \tilde{V}\right) \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in H_0^1(I)$, obtenemos que el sistema (3.25) y el siguiente son equivalentes: Hallar $(\lambda, \phi, r, \rho) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \times \mathbb{R} \times H_0^1(I)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_I \lambda'v' = 0 \quad \forall v \in H_0^1(I), \\ \int_I E\tilde{\beta}'\eta' + \int_I r\eta = \int_I (\beta - \beta_h)\eta - \int_I \rho'\eta \quad \forall \eta \in H_0^1(I), \\ \int_I \tilde{\beta}q - t^2 \int_I \frac{rq}{\kappa} = t^2 \int_I \frac{\lambda'q}{\kappa} \quad \forall q \in \mathbb{R}, \\ \int_I \rho'\delta' = \int_I \tilde{\beta}\delta' - t^2 \int_I \frac{\delta'r}{\kappa} - t^2 \int_I \frac{\rho'\delta'}{\kappa} \quad \forall \delta \in H_0^1(I). \end{array} \right. \tag{3.27}$$

De la primera ecuación de (3.27) tenemos que $\lambda = 0$. Así, repitiendo los argumentos usados para demostrar las Proposiciones 3.1 y 3.2, concluimos el resultado de regularidad adicional (3.24). Además podemos demostrar que las únicas soluciones $(\phi, \rho) \in H$ y $(\phi_h, \rho_h) \in H_h$ de los problemas (3.22) y (3.23) satisfacen la siguiente estimación del error:

$$\|(\phi, \rho) - (\phi_h, \rho_h)\|_H \leq Ch\|\beta - \beta_h\|_{0,I}. \tag{3.28}$$

En efecto, usando la estimación de error (3.19) del interpolante $\tilde{\Pi}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|(\phi, \rho) - (\phi_h, \rho_h)\|_H &\leq C \inf_{(\chi_h, u_h) \in H_h} \|(\phi, \rho) - (\chi_h, u_h)\|_H \\
&\leq C \|(\phi, \rho) - \tilde{\Pi}(\phi, \rho)\|_H \\
&= C \|(\phi - \mathcal{L}(\phi), \rho - \mathcal{I}(\rho))\|_H \\
&\leq Ch \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|\rho'''\|_{0,I_j}^2 \right) + t^{-2} \left(\sum_{i=1}^n \|\phi''\|_{0,I_j}^2 \right) \right\}^{1/2} \\
&\leq Ch \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|\rho'''\|_{0,S_i}^2 \right) + t^{-2} \left(\sum_{i=1}^n \|\phi''\|_{0,S_i}^2 \right) \right\}^{1/2} \\
&\leq Ch \|\beta - \beta_h\|_{0,I}.
\end{aligned}$$

Ahora, escogiendo $(\chi, u) = (\gamma - \gamma_h, w - w_h)$ en la ecuación (3.22), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|\beta - \beta_h\|_{0,I}^2 &= \int_I E(\phi + \rho)' (\chi + u)' + t^{-2} \int_I \kappa \phi \chi, \\
&= \int_I E(\phi + \rho)' ((\gamma - \gamma_h) + (w - w_h)')' + t^{-2} \int_I \kappa \phi (\gamma - \gamma_h).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la ortogonalidad del error

$$A((\gamma - \gamma_h, w - w_h), (\phi_h, \rho_h)) = 0 \quad \forall (\phi_h, \rho_h) \in H_h,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\beta - \beta_h\|_{0,I}^2 &= \int_I E(\phi + \rho)' ((\gamma - \gamma_h) + (w - w_h)')' + t^{-2} \int_I \kappa \phi (\gamma - \gamma_h) \\
&\quad - \int_I E((\gamma - \gamma_h) + (w - w_h)')' (\phi_h + \rho_h)' - t^{-2} \int_I \kappa (\gamma - \gamma_h) \phi_h, \\
&= A((\gamma - \gamma_h, w - w_h), (\phi - \phi_h, \rho - \rho_h)), \\
&\leq \|(\gamma - \gamma_h, w - w_h)\|_H \|(\phi - \phi_h, \rho - \rho_h)\|_H.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando el Teorema 3.3 y la estimación del error (3.28), se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\beta - \beta_h\|_{0,I}^2 &\leq Ch \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} h \|\beta - \beta_h\|_{0,I}, \\
&= Ch^2 \left(\|f\|_{0,I}^2 + \|g\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|g'\|_{0,S_i}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \|\beta - \beta_h\|_{0,I},
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

3.3. Resultados Numéricos

En esta sección presentaremos ensayos numéricos realizados en un código MATLAB, que consisten en la implementación de elementos finitos de Lagrange y Hermite. Estos experimentos numéricos nos ayudarán a confirmar el buen funcionamiento de nuestro esquema de elementos finitos. Comenzamos introduciendo algunas notaciones. La variable N corresponderá al número de grados de libertad, donde $N := \dim(H_h)$. Por otro lado, definimos los errores individuales por:

$$e_0(\gamma, w) := \{ \|(\gamma + w') - (\gamma_h + w'_h)\|_{1,I}^2 + t^{-2} \|\gamma - \gamma_h\|_{0,I}^2 + \|w - w_h\|_{1,I}^2 \}^{1/2},$$

$$e_0(\gamma) := \|\gamma - \gamma_h\|_{0,I}, \quad e_1(\gamma) := \|\gamma - \gamma_h\|_{1,I}, \quad e_0(w) := \|w - w_h\|_{0,I},$$

$e_1(w) := \|w - w_h\|_{1,I}$, $e_2(w) := \|w - w_h\|_{2,I}$, $e_0(\beta) := \|\beta - \beta_h\|_{0,I}$, $e_1(\beta) := \|\beta - \beta_h\|_{1,I}$, donde $(\gamma, w) \in H$ y $(\gamma_h, w_h) \in H_h$ son las únicas soluciones de los problemas (3.4) y (3.5), respectivamente.

Se definen las tasas experimentales de convergencia (rc_i) para los errores $e_i(\cdot)$ por:

$$rc_i(\cdot) := \frac{\log(e_i(\cdot)/e'_i(\cdot))}{\log(h/h')} \quad i = 0, 1, 2,$$

donde h y h' denotan dos tamaños de mallas sucesivas, e y e' denota los errores correspondientes.

Test 1. Sea $I = (0, 1)$. Se consideró $E(x) = 1$, $\kappa(x) = 4$, $g(x) = 0$ y $f(x) = \frac{-8\pi^3 t^3}{\kappa} \cos(2\pi x)$ de modo que las soluciones exactas están dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} w(x) &= \left(\frac{2\pi t^2}{\kappa} + \frac{1}{2\pi} \right) (1 - \cos(x)), \\ \gamma(x) &= \frac{-4\pi^2 t^2}{\kappa} \text{sen}(2\pi x), \\ \beta(x) &= \text{sen}(2\pi x). \end{aligned}$$

En lo que sigue, consideraremos distintos valores del espesor t para observar el comportamiento del método de elementos finitos con respecto a este parámetro. Además, verificaremos experimentalmente que el método propuesto es libre de bloqueo.

En el Cuadro 3.1 presentamos errores y tasas de convergencia para el esfuerzo de corte y el desplazamiento en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$. Además en los Cuadros 3.2 y 3.3 se presentan los errores y tasas para la variable rotación.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$e_0(\gamma, w)$	$rc_0(\gamma, w)$	$e_0(\gamma, w)$	$rc_0(\gamma, w)$	$e_0(\gamma, w)$	$rc_0(\gamma, w)$
17	16	$2.0766e - 02$	--	$1.9302e - 4$	--	$1.9302e - 4$	--
33	32	$5.8252e - 03$	2.88	$5.4113e - 5$	2.88	$5.4113e - 5$	2.88
65	64	$1.5463e - 03$	2.94	$1.4362e - 5$	2.94	$1.4362e - 5$	2.94
129	128	$3.9858e - 04$	2.97	$3.7018e - 6$	2.97	$3.7018e - 6$	2.97
257	256	$1.0120e - 04$	2.98	$9.3986e - 70$	2.98	$9.3986e - 7$	2.98

Cuadro 3.1: Errores y tasas de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$
17	16	$1.6493e - 6$	--	$1.6557e - 6$	--	$1.6557e - 6$	--
33	32	$2.4469e - 7$	2.88	$2.4563e - 7$	2.88	$2.4563e - 7$	2.88
65	64	$6.0765e - 8$	2.94	$3.3578e - 8$	2.94	$3.3578e - 8$	2.94
129	128	$1.3622e - 8$	2.97	$4.3939e - 9$	2.97	$4.3939e - 9$	2.97
257	256	$3.3032e - 9$	2.98	$5.6211e - 10$	2.98	$5.6211e - 10$	2.98

Cuadro 3.2: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{0,I}$.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$
17	16	$2.0141e - 2$	--	$1.9301e - 4$	--	$1.9301e - 4$	--
33	32	$5.6519e - 3$	1.92	$5.4112e - 5$	1.92	$5.4112e - 5$	1.92
65	64	$1.5004e - 3$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96
129	128	$3.8677e - 4$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98
257	256	$9.8201e - 5$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99

Cuadro 3.3: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{1,I}$.

Podemos apreciar que para distintos valores del parámetro de espesor, el método numérico es convergente independiente del tamaño de dicho parámetro. Además, podemos ver el orden de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$, es mayor al esperado, de acuerdo a lo demostrado en el Teorema 3.3.

A continuación, mostraremos en las Figuras 3.1 y 3.2 las graficas de las soluciones exactas versus las aproximadas para las variables w, γ, w' y β para un espesor $t = 0.1$ y distintos grados de libertad.

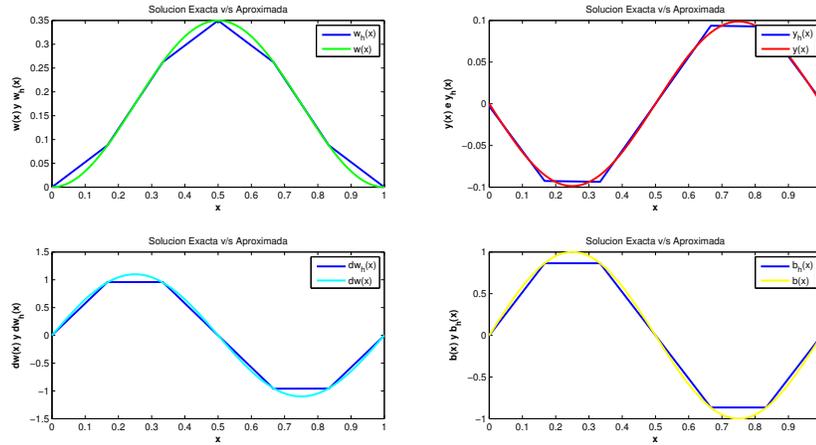


Figura 3.1: Graficas de las soluciones exactas vs. aproximadas para $t = 0.1$ y $N = 5$.

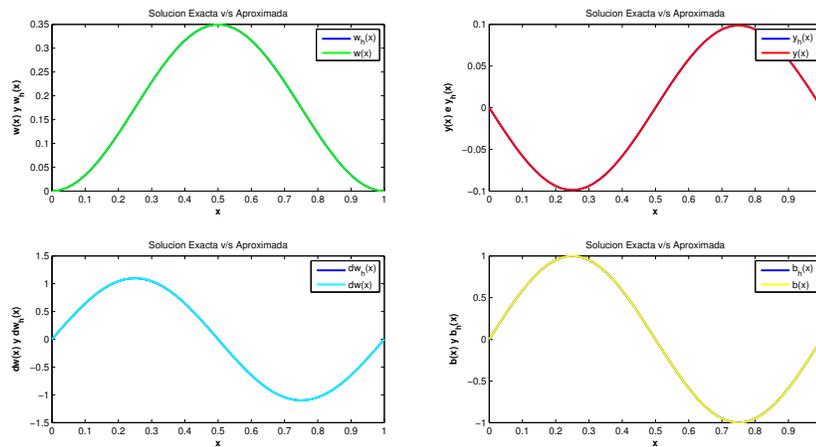


Figura 3.2: Graficas de las soluciones exactas vs. aproximadas para $t = 0.1$ y $N = 50$.

Podemos ver que, a medida que aumentamos el número de grados de libertad, la solución

obtenida por nuestro método se va aproximando a la solución exacta, independiamente del parámetro t

Ahora presentaremos en las Figuras 3.3 y 3.4 las curvas de error, es decir, un gráfico log-log de errores vs. los grados de libertad para las variables w, γ, w' y β , considerando distintos espesores.

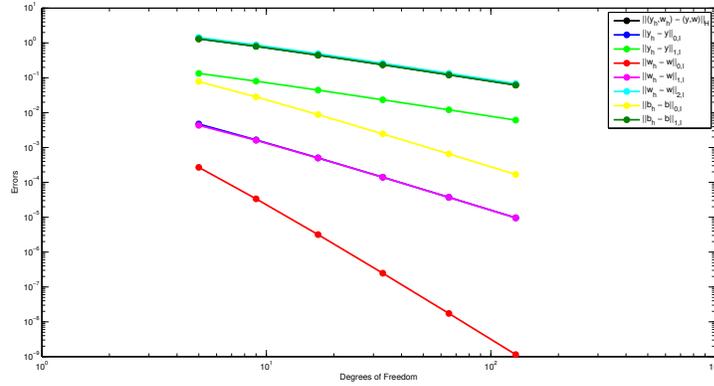


Figura 3.3: Gráfica log-log de errores vs. número de grados de libertad para espesor $t = 0.1$.

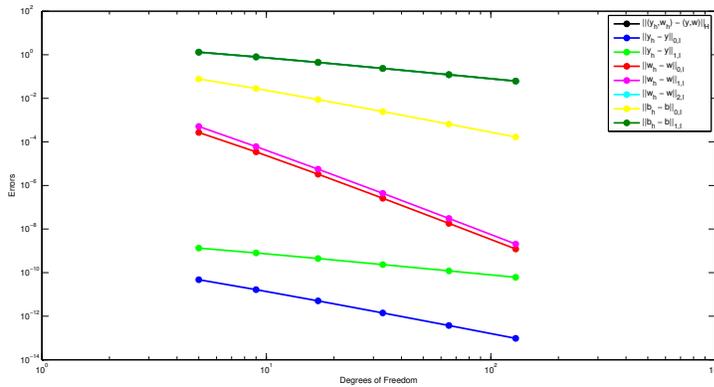


Figura 3.4: Gráfica log-log de errores vs. número de grados de libertad para espesor $t = 0.00001$.

Test 2. Se consideró:

$$E(x) = \begin{cases} e^{-0.5}, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \kappa(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{0.5}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-0.5}e^x, & 0 \leq x < 0.5, \\ -e^{0.5}e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

Hemos considerado $E(x)$, $\kappa(x)$ y $f(x)$ continuas a trozos. Como lo requiere la teoría. La solución analítica de este ejemplo particular se puede obtener resolviendo los problemas correspondientes en $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$ en términos de los valores desconocidos en $x = 0.5$ y haciendo coincidir las soluciones en este punto.

En el Cuadro 3.4 presentamos errores y tasas de convergencia para el esfuerzo de corte y el desplazamiento en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$. Además en los Cuadros 3.5 y 3.6 se presentan los errores y tasas para la variable rotación.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$t^{-2}e_0(\gamma)$	$rc_0(\gamma)$	$t^{-2}e_0(\gamma)$	$rc_0(w)$	$t^{-2}e_0(\gamma)$	$rc_0(\gamma)$
17	16	$7.1262e - 6$	--	$7.1382e - 08$	--	$7.1382e - 10$	--
33	32	$1.9358e - 6$	1.93	$1.9391e - 8$	1.93	$1.9391e - 10$	1.93
65	64	$5.0461e - 7$	1.96	$5.0548e - 9$	1.96	$5.0548e - 11$	1.96
129	128	$1.2882e - 7$	1.98	$1.2904e - 9$	1.98	$1.2904e - 11$	1.98
257	256	$3.2542e - 8$	1.99	$3.2599e - 10$	1.99	$3.2599e - 12$	1.99

Cuadro 3.4: Errores y tasas de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$e_0(\beta')$	$rc_0(\beta')$	$e_0(\beta')$	$rc_0(\beta')$	$e_0(\beta')$	$rc_0(\beta')$
17	16	$1.9227e - 4$	--	$1.9301e - 4$	--	$1.9301e - 4$	--
33	32	$5.3907e - 5$	1.92	$5.4112e - 5$	1.92	$5.4112e - 5$	1.92
65	64	$1.4307e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96
129	128	$3.6878e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98
257	256	$9.3629e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99

Cuadro 3.5: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{0,I}$.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$
17	16	$1.9259e - 4$	--	$1.9302e - 4$	--	$1.9302e - 4$	--
33	32	$5.3991e - 5$	1.92	$5.4113e - 5$	1.92	$5.4113e - 5$	1.92
65	64	$1.4329e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96
129	128	$3.6933e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98
257	256	$9.3770e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99

Cuadro 3.6: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{1,I}$.

A continuación, las Figuras 3.5 y 3.6 muestran las graficas de las soluciones exactas versus las aproximadas para las variables w, γ, w' y β para $t = 0.001$ y distintos grados de libertad.

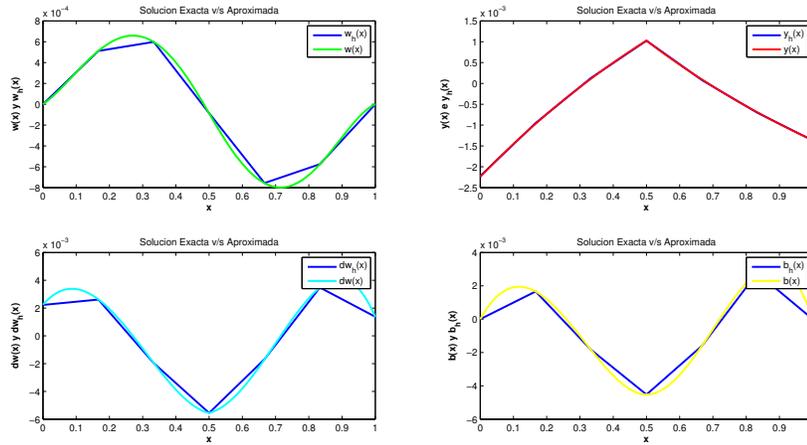


Figura 3.5: Graficas de las soluciones exactas vs. aproximadas para $t = 0.001$ y $N = 5$.

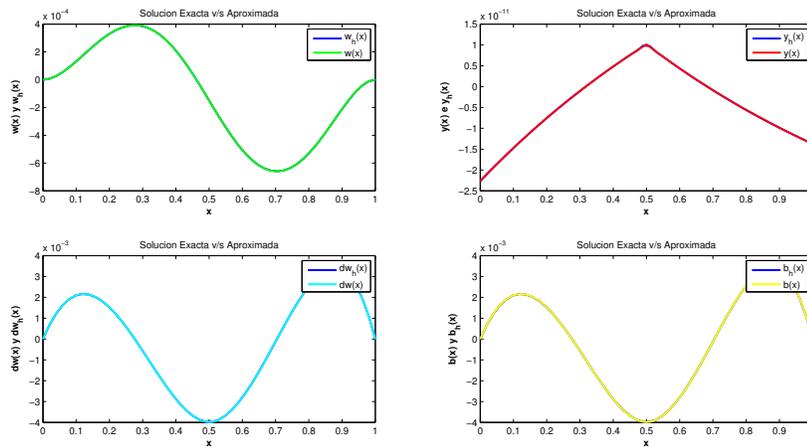


Figura 3.6: Graficas de las soluciones exactas vs. aproximadas para $t = 0.001$ y $N = 50$.

Ahora presentaremos en las Figuras 3.7 y 3.8 las curvas de error para las variables w, γ, w' y β , considerando distintos espesores.

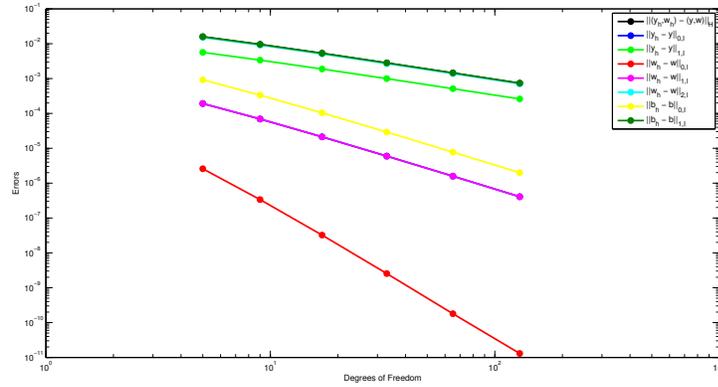


Figura 3.7: Gráfica log-log de errores vs. número de grados de libertad para espesor $t = 0.1$.

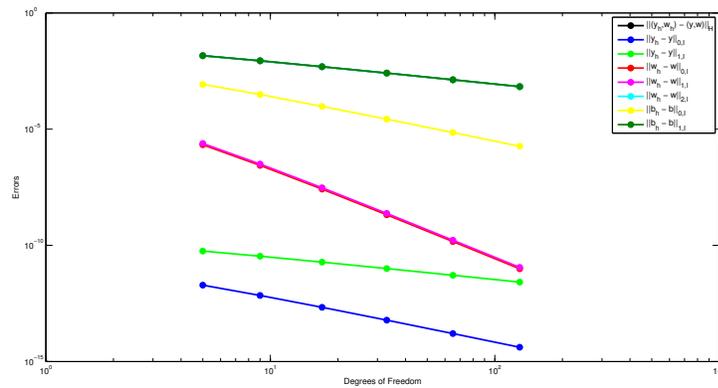


Figura 3.8: Gráfica log-log de errores vs. número de grados de libertad para espesor $t = 0.00001$.

Test 3. Para este test consideramos las siguientes funciones:

$$E(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \kappa(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{1/2}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

En este caso, hemos considerado $E(x)$, $\kappa(x)$ y $f(x)$ continuas a trozos. Como lo requiere la teoría. La solución analítica de este ejemplo particular se puede obtener resolviendo los problemas correspondientes en $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$ en términos de los valores desconocidos en $x = 0.5$ y haciendo coincidir las soluciones en este punto.

A continuación, en el Cuadro 3.7 presentamos errores y tasas de convergencia para el esfuerzo de corte y el desplazamiento en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$. Además en los Cuadros 3.8 y 3.9 se presentan los errores y tasas para la variable rotación.

d.o.f	$1/h$	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$t^{-2}e_0(\gamma)$	$rc_0(\gamma)$	$t^{-2}e_0(\gamma)$	$rc_0(w)$	$t^{-2}e_0(\gamma)$	$rc_0(\gamma)$
17	16	$7.1262e - 6$	--	$7.1382e - 08$	--	$7.1382e - 10$	--
33	32	$1.9358e - 6$	1.93	$1.9391e - 8$	1.93	$1.9391e - 10$	1.93
65	64	$5.0461e - 7$	1.97	$5.0548e - 9$	1.97	$5.0548e - 11$	1.97
129	128	$1.2882e - 7$	1.98	$1.2904e - 9$	1.98	$1.2904e - 11$	1.98
257	256	$3.2542e - 8$	1.99	$3.2599e - 10$	1.99	$3.2599e - 12$	1.99

Cuadro 3.7: Errores y tasas de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$e_0(\beta')$	$rc_0(\beta')$	$e_0(\beta')$	$rc_0(\beta')$	$e_0(\beta')$	$rc_0(\beta')$
17	16	$1.9227e - 4$	--	$1.9301e - 4$	--	$1.9301e - 4$	--
33	32	$5.3907e - 5$	1.92	$5.4112e - 5$	1.92	$5.4112e - 5$	1.92
65	64	$1.4307e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96
129	128	$3.6878e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98
257	256	$9.3629e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99

Cuadro 3.8: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{0,I}$.

d.o.f	1/h	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
		$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$
17	16	$1.9259e - 4$	--	$1.9302e - 4$	--	$1.9302e - 4$	--
33	32	$5.3991e - 5$	1.92	$5.4113e - 5$	1.92	$5.4113e - 5$	1.92
65	64	$1.4329e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96	$1.4362e - 5$	1.96
129	128	$3.6933e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98	$3.7018e - 6$	1.98
257	256	$9.3770e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99	$9.3986e - 7$	1.99

Cuadro 3.9: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{1,I}$.

Podemos apreciar que para distintos valores del parámetro de espesor, el método numérico es convergente independiente del tamaño de dicho parámetro. Además, podemos ver el orden de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$, es mayor al esperado, de acuerdo a lo demostrado en el Teorema 3.3.

A continuación, en las Figuras 3.9 y 3.10 se muestran las graficas de las soluciones exactas versus las aproximadas para las variables w, γ, w' y β para un espesor $t = 0.1$ y distintos grados de libertad.

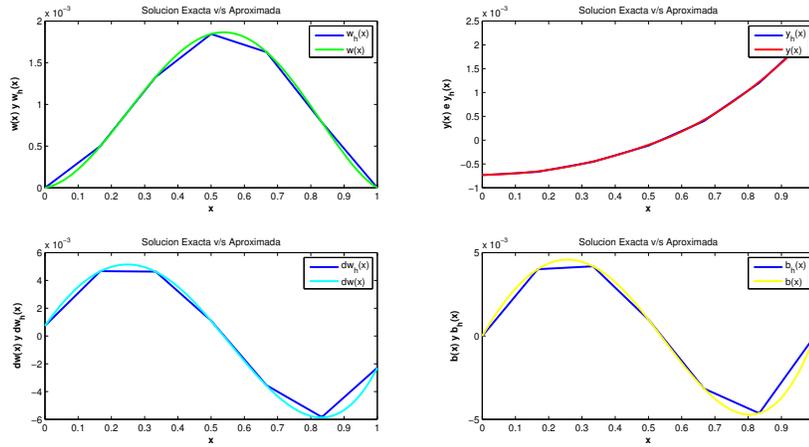


Figura 3.9: Graficas de las soluciones exactas vs. aproximadas para $t = 0.1$ y $N = 5$.

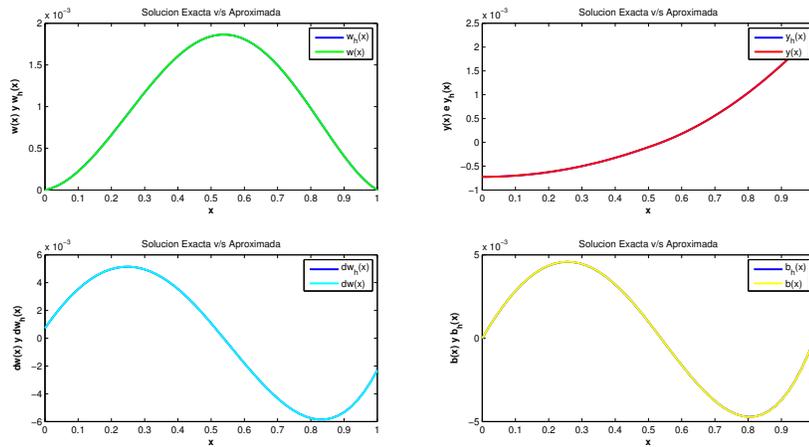


Figura 3.10: Graficas de las soluciones exactas vs. aproximadas para $t = 0.1$ y $N = 50$.

Ahora presentaremos en las Figuras 3.11 y 3.12 las curvas de error para las variables w, γ, w' y β , considerando distintos espesores.

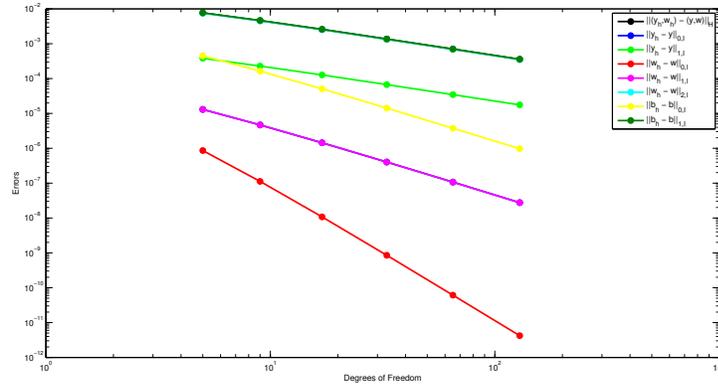


Figura 3.11: Gráfica log-log de errores vs. número de grados de libertad para espesor $t = 0.1$.

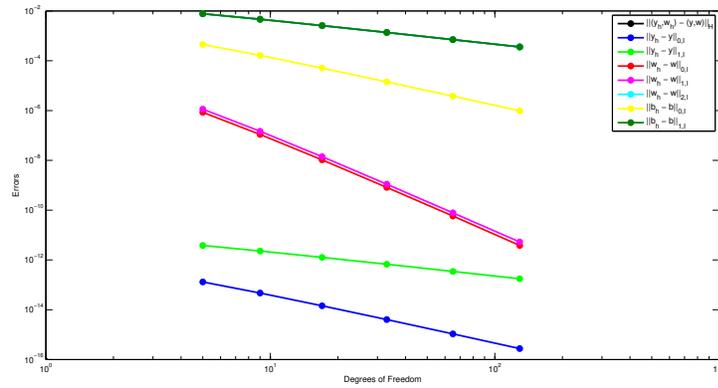


Figura 3.12: Gráfica log-log de errores vs. número de grados de libertad para espesor $t = 0.00001$.

Observación 3.5 *Es importante resaltar que si los datos $E(x)$ y $\kappa(x)$ no satisfacen sus hipótesis correspondientes, nuestro método de elementos finitos no será convergente, esto se puede apreciar en el siguiente test donde consideramos $\kappa(x)$ como función discontinua en $x = 0.5$.*

Test 4. Para este test consideramos las siguientes funciones:

$$E(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \kappa(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 0.5, \\ 1, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

En este caso, hemos considerado $\kappa(x)$ con una discontinuidad en $x = 0.5$. La solución analítica de este ejemplo particular se puede obtener resolviendo los problemas correspondientes en $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$ en términos de los valores desconocidos en $x = 0.5$ y haciendo coincidir las soluciones en este punto.

En el Cuadro 3.10 se presentan errores y tasas de convergencia para el esfuerzo de corte y el desplazamiento en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$, en donde se puede apreciar que el método no converge.

N	$1/h$	$e_0(\gamma, w)$	$rc_0(\gamma, w)$
5	4	$1.3053e - 2$	—
9	8	$9.2307e - 3$	0.59
17	16	$7.0537e - 3$	0.41
33	32	$6.1236e - 3$	0.21
65	64	$5.7953e - 3$	0.08
129	128	$5.6859e - 3$	0.03

Cuadro 3.10: Análisis para $t = 0.1$. Error y tasa de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

Observación 3.6 *A continuación presentaremos Test numéricos, en donde aumentamos el grado polinomial para la aproximación de la variable γ . Así el espacio discreto H_h queda definido como:*

$$H_h = \left\{ (\eta_h, v_h) \in \widetilde{V}_h \times Q_h : v_h(0) = v_h(L) = 0 \text{ y } (\eta_h - v_h')(0) = (\eta_h - v_h')(L) = 0 \right\},$$

donde

$$V_h := \{ \eta_h \in H^1(I) : \eta_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_2(I_j), j = 1, \dots, N \} \subset H^1(I).$$

La idea de aumentar el grado polinomial es para ver si el método de elementos finitos mantiene o aumenta el orden $\mathcal{O}(h^2)$ presentado en los Test numéricos anteriores, donde se aproxima γ por funciones lineales a trozos. Además, para estos nuevos ejemplos numéricos consideremos mallas distintas a las usadas anteriormente.

Test 1. Sea $I = (0, 1)$. Se consideró $E(x) = 1$, $\kappa(x) = 4$, $g(x) = 0$ y $f(x) = \frac{-8\pi^3 t^3}{\kappa} \cos(2\pi x)$ de modo que las soluciones exactas están dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} w(x) &= \left(\frac{2\pi t^2}{\kappa} + \frac{1}{2\pi} \right) (1 - \cos(x)), \\ \gamma(x) &= \frac{-4\pi^2 t^2}{\kappa} \text{sen}(2\pi x), \\ \beta(x) &= \text{sen}(2\pi x). \end{aligned}$$

En lo que sigue, consideraremos distintos valores del espesor t para observar el comportamiento del método de elementos finitos con respecto a este parámetro. Además, verificaremos experimentalmente que el método propuesto es libre de bloqueo.

En el Cuadro 3.11 presentamos errores y tasas de convergencia para el esfuerzo de corte y el desplazamiento en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$. Además en los Cuadros 3.12 y 3.13 se presentan los errores y tasas para la variable rotación.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$
5	$1.7891e - 1$	--	$1.7887e - 1$	--	$1.7887e - 1$	--
9	$6.5022e - 2$	1.72	$6.5015e - 2$	1.72	$6.5015e - 2$	1.72
17	$2.0142e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84
33	$5.6520e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92
65	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96
129	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98

Cuadro 3.11: Errores y tasas de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$
5	$4.5951e - 3$	--	$4.5951e - 3$	--	$4.5951e - 3$	--
9	$1.0028e - 3$	2.59	$1.0028e - 3$	2.59	$1.0028e - 3$	2.59
17	$1.7264e - 4$	2.77	$1.7264e - 4$	2.77	$1.7264e - 4$	2.77
33	$2.5650e - 5$	2.87	$2.5650e - 5$	2.87	$2.5650e - 5$	2.87
65	$3.5079e - 6$	2.93	$3.5079e - 6$	2.93	$3.5079e - 6$	2.93
129	$4.5908e - 7$	2.97	$4.5908e - 7$	2.97	$4.5908e - 7$	2.97

Cuadro 3.12: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{0,I}$.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$
5	$1.7881e - 1$	--	$1.7881e - 1$	--	$1.7881e - 1$	--
9	$6.5007e - 2$	1.72	$6.5007e - 2$	1.72	$6.5007e - 2$	1.72
17	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84
33	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92
65	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96
129	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98

Cuadro 3.13: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{1,I}$.

Podemos apreciar que para distintos valores del parámetro de espesor, el método numérico es convergente independiente del tamaño de dicho parámetro. Además, podemos ver el orden de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$, se mantiene en $\mathcal{O}(h^2)$.

Test 2. Se consideró:

$$E(x) = \begin{cases} e^{-0.5}, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \kappa(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{0.5}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-0.5}e^x, & 0 \leq x < 0.5, \\ -e^{0.5}e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

Hemos considerado $E(x)$, $\kappa(x)$ y $f(x)$ continuas a trozos. Como lo requiere la teoría. La solución analítica de este ejemplo particular se puede obtener resolviendo los problemas correspondientes en $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$ en términos de los valores desconocidos en $x = 0.5$ y haciendo coincidir las soluciones en este punto.

En el Cuadro 3.14 presentamos errores y tasas de convergencia para el esfuerzo de corte y el desplazamiento en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$. Además en los Cuadros 3.15 y 3.16 se presentan los errores y tasas para la variable rotación.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$
5	$1.7891e - 1$	--	$1.7887e - 1$	--	$1.7887e - 1$	--
9	$6.5022e - 2$	1.72	$6.5015e - 2$	1.72	$6.5015e - 2$	1.72
17	$2.0142e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84
33	$5.6520e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92
65	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96
129	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98

Cuadro 3.14: Errores y tasas de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$
5	$4.5951e - 3$	--	$4.5951e - 3$	--	$4.5951e - 3$	--
9	$1.0028e - 3$	2.59	$1.0028e - 3$	2.59	$1.0028e - 3$	2.59
17	$1.7264e - 4$	2.77	$1.7264e - 4$	2.77	$1.7264e - 4$	2.77
33	$2.5650e - 5$	2.87	$2.5650e - 5$	2.87	$2.5650e - 5$	2.87
65	$3.5079e - 6$	2.93	$3.5079e - 6$	2.93	$3.5079e - 6$	2.93
129	$4.5908e - 7$	2.97	$4.5908e - 7$	2.97	$4.5908e - 7$	2.97

Cuadro 3.15: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{0,I}$.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$
5	$1.7881e - 1$	--	$1.7881e - 1$	--	$1.7881e - 1$	--
9	$6.5007e - 2$	1.72	$6.5007e - 2$	1.72	$6.5007e - 2$	1.72
17	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84
33	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92
65	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96
129	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98

Cuadro 3.16: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{1,I}$.

Test 3. Para este test consideramos las siguientes funciones:

$$E(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \kappa(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{1/2}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 0.5, \\ e^{-x}, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

En este caso, hemos considerado $E(x)$, $\kappa(x)$ y $f(x)$ continuas a trozos. Como lo requiere la teoría. La solución analítica de este ejemplo particular se puede obtener resolviendo los problemas correspondientes en $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$ en términos de los valores desconocidos en $x = 0.5$ y haciendo coincidir las soluciones en este punto.

A continuación, en el Cuadro 3.17 presentamos errores y tasas de convergencia para el esfuerzo de corte y el desplazamiento en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$. Además en los Cuadros 3.18 y 3.19 se presentan los errores y tasas para la variable rotación.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$	$e_H(\gamma, w)$	$rc_H(\gamma, w)$
5	$1.7891e - 1$	--	$1.7887e - 1$	--	$1.7887e - 1$	--
9	$6.5022e - 2$	1.72	$6.5015e - 2$	1.72	$6.5015e - 2$	1.72
17	$2.0142e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84
33	$5.6520e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92
65	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96
129	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98

Cuadro 3.17: Errores y tasas de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$	$e_0(\beta)$	$rc_0(\beta)$
5	$4.5951e - 3$	--	$4.5951e - 3$	--	$4.5951e - 3$	--
9	$1.0028e - 3$	2.59	$1.0028e - 3$	2.59	$1.0028e - 3$	2.59
17	$1.7264e - 4$	2.77	$1.7264e - 4$	2.77	$1.7264e - 4$	2.77
33	$2.5650e - 5$	2.87	$2.5650e - 5$	2.87	$2.5650e - 5$	2.87
65	$3.5079e - 6$	2.93	$3.5079e - 6$	2.93	$3.5079e - 6$	2.93
129	$4.5908e - 7$	2.97	$4.5908e - 7$	2.97	$4.5908e - 7$	2.97

Cuadro 3.18: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{0,I}$.

N	$t = 1.0e - 3$		$t = 1.0e - 4$		$t = 1.0e - 5$	
	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$	$e_1(\beta)$	$rc_1(\beta)$
5	$1.7881e - 1$	--	$1.7881e - 1$	--	$1.7881e - 1$	--
9	$6.5007e - 2$	1.72	$6.5007e - 2$	1.72	$6.5007e - 2$	1.72
17	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84	$2.0141e - 2$	1.84
33	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92	$5.6519e - 3$	1.92
65	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96	$1.5004e - 3$	1.96
129	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98	$3.8677e - 4$	1.98

Cuadro 3.19: Error y tasa de convergencia en la norma $\|\cdot\|_{1,I}$.

Podemos apreciar que para distintos valores del parámetro de espesor, el método numérico es convergente independiente del tamaño de dicho parámetro. Además, podemos ver el orden de convergencia en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$, se mantiene en $\mathcal{O}(h^2)$.

CONCLUSIONES

En esta tesis se presentó una formulación variacional alternativa a las ya estudiadas en [3, 10] para el problema de Timoshenko, en el cual se introduce como cambio de variable la deformación de corte transversal escrito en términos de la rotación y la derivada del desplazamiento de tal forma de obtener un problema variacional que fue estudiado a nivel continuo, demostrando existencia y unicidad de solución y que la solución depende continuamente de los datos. Se demostró regularidad adicional de las soluciones del problema, usando los resultados de regularidad obtenidos en [10].

Se introdujo un método de elementos finitos que aproxima la deformación de corte transversal con funciones lineales a trozos y el desplazamiento con funciones cúbicas a trozos. Además se mostro que el problema variacional a nivel discreto esta bien puesto y tiene solución única por Lax-Milgram y depende continuamente de los datos.

Presentamos distintos ejemplos numéricos en donde se consideraron distintos espesores, para observar el comportamiento del método de elementos finitos con respecto a este parámetro. Además, se logro verificar el orden de convergencia lineal en la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_H$, lo cual implicó que nuestro método sea libre de bloqueo numérico.

En eventuales trabajos futuros se podrían considerar las siguientes tareas:

- Demostrar teóricamente los ordenes $\mathcal{O}(h^2)$ y $\mathcal{O}(h^3)$ que se obtuvieron numéricamente.
- Extender los resultados obtenidos en los Capítulo 3 considerando condiciones de contorno más generales para la viga de Timoshenko.
- Analizar el problema de valores propios para la viga de Timoshenko considerando el cambio de variable propuesto en este trabajo.
- Estudiar otros métodos de elementos finitos para la viga de Reddy-Bickford.

Bibliografía

- [1] A. Ern, J. L. Guermond: *Theory and Practice of Finite Elements*, Applied Mathematical Sciences, **159**, Springer, New York, (2004)
- [2] C. Zhangxin: *Finite Element Methods and Their Applications*, Scientific Computation, Springer, Berlin, (2005)
- [3] D. N. Arnold: *Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem*, Numer. Math. **37**(3), 405–421 (1981)
- [4] L. Beirão da Veiga, T.J.R. Hughes, J. Kiendl, C. Lovadina, J. Niiranen, A. Reali, H. Speleers: *A locking-free model for Reissner-Mindlin plates: analysis and isogeometric implementation via NURBS and triangular NURPS*, Math. Models Methods Appl. Sci. **25**(8), 1519–1551 (2015)
- [5] R. Bouclier, T. Elguedj, A. Combescure: *Locking free isogeometric formulations of curved thick beams*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **245-246**, 144–162 (2012)
- [6] S.C. Brenner, L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3rd edn., Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, (2008)
- [7] P. G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problem*. North-Holland, (1978)
- [8] G. N. Gatica: *A simple introduction to the mixed finite element method. Theory and Applications*. Springer, New York, (2014)
- [9] G. N. Gatica: *Introducción al Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Reverté, Barcelona, (2014)
- [10] F. Lepe, D. Mora, R. Rodríguez: *Locking-free finite element method for a bending moment formulation of Timoshenko beams*. Comput. Math. Appl., **68**(3), 118–131 (2014)

- [11] F. Lepe, D. Mora, R. Rodríguez: *Finite element analysis of a bending moment formulation for the vibration problem of a non-homogeneous Timoshenko beam*. J. Sci. Comput., **66**(2), 825–848 (2016).
- [12] C. Lovadina, D. Mora, R. Rodríguez: *A locking-free finite element method for the buckling problem of a non-homogeneous Timoshenko beam*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **45**(4), 603-626 (2011)
- [13] J.N. Reddy: *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, (1993)
- [14] S.P. Timoshenko: *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Phil. Mag. **41**, 744–746 (1921)
- [15] S.P. Timoshenko: *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*, Phil. Mag., **43**, 125–131 (1922)